

TEKNOLOGISTEN APUVÄLINEIDEN VAIKUTUS MATEMAATTISTEN KOKONAISUUKSIEN OPPIMISEEN

Tanja Linjakumpu

Pro gradu -tutkielma
Maaliskuu 2019

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -järjestelmällä.

Sisältö

1 Johdanto	2
2 Teoria matematiikan oppimisen taustalla	4
2.1 Konstruktivismi oppimisen perustana	4
2.2 Metakognitio	5
2.3 Matemaattinen taito	7
2.4 Käsitteistä kokonaisuuksiin	9
3 Teknologia opetuskäytössä	12
4 Teknologian vaikutus matemaattisten kokonaisuuksien oppimiseen	14
4.1 Oppimisen tukeminen ja sosiaalinen ympäristö	14
4.2 Matemaattisen taidon kehittyminen	18
5 Johtopäätökset	31
Lähdeluettelo	33

1 Johdanto

Sen jälkeen kun tietokone alkoi yleistyä arkikäytössä 1980-luvulla, teknologinen kehitys on mennyt yhä kiihtyvää vauhtia eteenpäin. Transistorin keksiminen johti siihen, että tietokoneita pystyttiin valmistamaan helposti ja edullisesti sekä kotitalouksille että yrityksille. Myöhemmin kehitetty mikroprosessori mahdollisti pienempien ja tehokkaampien laitteiden valmistuksen, minkä seurauksena teknologia oli saatavilla yhä useammille.

Viimeisten vuosikymmenten aikana useimmissa maissa on havaittavissa selkeä muutos teollisesta yhteiskunnasta tietoyhteiskuntaan. Digitaalisten sovellutusten lisääntyessä myös teknologisten laitteiden ja ohjelmistojen sekä niiden tekijöiden ja kehittäjien kysyntä kasvaa. Yhä useampien palveluiden muuttuessa sähköisiksi teknologian käytön osaamista vaaditaan jokapäiväisessä arjessakin. Ympäristön jatkuva muutos asettaa vaatimuksia myös työssä toimimiselle. Rutiininomaisella tekemisellä ei enää pärjää työyhteiskunnassa, jossa nykyihmisen tulee osata toimia kunkin tilanteen vaatimalla tavalla. Muutama vuosi sitten opittu tieto enää kanna läpi koko elämän. [1]

Digitalisoituminen ja sen suuri merkitys kaikilla elämän osa-alueilla näkyy uusina odotuksina useimpien aineiden opetuksessa. Erityisesti matematiikan opetus on mullistunut digitalisaation myötä, sillä matemaattinen tieto on perustana kaikissa teknologisissa laitteissa ja niiden kehityksessä. Kuitenkaan pelkkä matematiikan mekaanisen laskemisen hallitseminen ei enää riitä, vaan edellytyksenä jatko-opinnoissa ja lopulta työelämässä menestymiseen on vankka matemaattisten kokonaisuuksien syvällinen hallintaa sekä erityisesti kyky soveltaa ja yhdistää matematiikan abstraktit käsitteet luonnonilmiöihin. Opetuksen kannalta tämä tarkoittaa sitä, että perinteisen opettajajohdoisen opetuksen rinnalle tulisi löytää uusia luovuutta, ongelmanratkaisukykyä ja soveltamisen taitoa kehittävää opetusta. Uusien opetustapojen käyttöönotto muuttaa väistämättä myös luokan sisäistä dynamiikkaa ja opettajan roolia. Vaikka vastuu oppimisesta näyttäisi olevan siirtymässä opettajalta oppilaalle, ei opettajan merkitys vähene, vaan jopa kasvaa. On ehdotettu, että ratkaisu teknologisen kehityksen seurauksena syntyneeseen vaatimukseen opetustapojen tehostamisesta ja kehittämisestä saattaa löytyä teknologiasta itsestään. [1]

Teknologian vaikutusta oppimiseen on tutkittu jos siitä asti, kun ensimmäisiä teknologisia apuvälineitä alkoi näkyä opetuksessa ja saadut tutkimustulokset viittaavat vahvasti siihen, että teknologian käytön seurauksena oppimistulokset ovat parantuneet. Tässä tutkielmassa analysoidaan kirjallisuutta

den pohjalta, mihin teknologian oppimistuloksia parantava vaikutus perustuu erittelemällä oppimiseen ja matemaattisen taidon eri osa-alueiden kehittymiseen liittyviä tekijöitä. Opetusteknologian oppimisprosessiin vaikuttavien tekijöiden ymmärtämiseksi tutkielman toisessa luvussa tarkastellaan konstruktivistisen oppimiskäsityksen näkökulmasta oppimisen teoriaa. Matemaattinen taito jaetaan viiteen osa-alueeseen, ja matemaattisen ymmärryksen analysoimiseksi määritellään matemaattisen käsitteen ja kokonaisuuden termit. Kolmas luku käsittelee eritasoisia teknologisia interventioita ja niiden vaikutuksia matematiikan oppimiseen. Tutkielman neljännessä luvussa käsitellään matemaattisen taidon, oppimisen ja oppimisympäristön erityispiirteitä ja opetusteknologian mahdollisuuksia näiden piirteiden kehittämiseen. Lisäksi sivutaan joitakin ongelmia, joita teknologinen interventio saattaa tuoda opetukseen ja oppimiseen.

2 Teoria matematiikan oppimisen taustalla

Nykyiseen matematiikan syvälliseen osaamiseen liittyvät vaatimukset ovat mullistaneet koko matematiikan opettamisen. Aktiivisen ja oppilaslähtöisen oppimisympäristön korostaminen on antanut uudenlaista huomiota oppimisen sisäisiin prosesseihin. Keskeisiksi kysymyksiksi ovat nousseet, mikä mekanismi on oppimisen taustalla ja mikä oppimista säätelee. Tiedonmuodostusprosessin selittämiseksi konstruktivististen käsitysten voidaan sanoa olevan valtavirtaa. Sen perusajatuksia esimerkiksi oppimisesta ja sosiaalisesta vuorovaikutuksesta ovat taustalla monissa pedagogisissa sovelluksissa. Tässä luvussa tarkastellaan matematiikan oppimista konstruktivistisen oppimiskäsityksen näkökulmasta ja analysoidaan Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin jaottelun mukaan, mitä matemaattinen taito sisältää [2]. Kilpatrickin ym. teoksen lisäksi teoriapohjana käytetään Haapasalon teosta *Oppiminen, tieto, ongelmanratkaisu* [3] ja Järvelän, Häkkisen ja Lehtisen artikkelikokoelmaa *Oppimisen teoria ja teknologia opetuskäytössä* [4].

2.1 Konstruktivismi oppimisen perustana

Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan kaikki tieto rakentuu aiemman kokemuksen, tiedon ja käsitteistön pohjalta. Oppiminen nähdään aktiivisena tapahtumana, jossa henkilö konstruoi uutta tietoa aiempien tietorakenteiden varaan jatkuvasti havainnoimalla ja muokkaamalla saamaansa informaatiota. Näitä oppimisprosessin seurauksena jäsentyneitä rakenteita kutsutaan *skeemoiksi*. Syntyneitä skeemoja voidaan laajentaa tai jopa uudelleenrakentaa tarvittaessa. *Assimiloinniksi* kutsutaan tapahtumaa, jossa henkilö tulkitsee esitettyä informaatiota suhteessa aiempaan tietoon ja pyrkii liittämään sen sisäisiin skeemoihinsa. Se on siten tietorakenteita täydentävää toimintaa, joka luo yhteyksiä käsitteiden tai laajempien kokonaisuuksien välille. Tietoa rakentuu myös silloin, kun henkilön skeemat ja havainnoinnin kohteena oleva ympäristö ovat ristiriidassa keskenään. Tällöin puhutaan *kognitiivisesta konfliktista*, jonka seurauksena uusi tieto *akkomodoituu* eli se muovaa henkilön tietorakenteita niin, että informaatio sopii siihen. [3, s.80-82]

Kun oppilaan tietorakenteet muuttuvat informaatioiden konfliktin vuoksi, puhutaan *käsitteellisestä muutoksesta*. Käsitteellinen muutos voi tapahtua oppiaineen sisällä, tai kun oppilaan luomat, usein virheelliset arkikäsitteet eroavat tieteellisestä selityksestä. [4, s. 19-22]. Matematiikassa käsitteellisen muutoksen vaatii usein esimerkiksi lukujoukkojen laajennus. Varhaisessa lapsuudessa numerot ymmärretään naivina määrän mittana, mutta myöhemmin niiden liittyessä algebrallisiin sturktuureihin on mahdollista omaksua yhä

abstraktimpia käsitteitä, kuten negatiiviset tai kompleksiset luvut [5]. Joissain tilanteissa virheelliset tietorakenteet voivat vaikeuttaa tai jopa estää oppimista. Tällöin kysessä on *käsitteellisen muutoksen ongelma*, jolloin uusi tieto ei voi rakentua vanhan tiedon varaan. On vaarana, että oppiminen jää vain ulkoaopetteluun varaan, mikä heikentää oppimisen laatua ja erityisesti tieteellisen tiedon rakentumista merkittävästi. [4, s. 19-22]

Kasvatustieteissä konstruktivistinen suuntaus on laaja joukko tutkimuskohteiden erilaisia painotuksia, jotka kuitenkin jakavat käsityksen tiedon konstruktivisuudesta. Painotusten kirjosta huolimatta konstruktivismiin erilaiset muodot voidaan jaotella kahteen osaan sen perusteella, minkä ajatellaan ensisijassa ohjaavan oppimisprosessia. *Yksilökonstruktivismiin* mukaan ympäristön havainnointiin ja tiedonmuodostukseen vaikuttavat vain henkilön omat käsitykset ja asenteet. Silloin oppimisenkin ajatellaan tapahtuvan ainoastaan itsesäätelyn seurauksena. Tämä tarkoittaa, että uusi tieto rakentuu henkilön aiemman kokemuksen pohjalta eikä ulkoisilla tekijöillä voi vaikuttaa prosessiin. Nykypäivänä kuitenkin tiedonmuodostuksen sisäisen rakentumisen ajatellaan olevan vain osa kokonaisuutta. Yhä enemmän oppiminen nähdään ryhmäprosessin seurauksena ja kasvatustieteen alalla kehitys on mennyt kohti *sosiokonstruktivistisia* oppimisteorioita. Sosiokonstruktivismissa erityisen mielenkiinnon kohteiksi nousee sosiaalisen vuorovaikutuksen muodot sekä fyysisen ympäristön ja kulttuurin vaikutus oppimiseen [3, s. 95-104].

Konstruktivismiin mukaan tietoa itsessään ei voi siirtää yksilöltä toiselle, koska se on henkilökohtaista ja havaitsijan kokemuksen ja käsitteistön pohjalta muodostunutta. Näin ollen opettaja ei voi välittää omia tietorakenteitaan eteenpäin, vaan jokaisen oppilaan tulee konstruoida ne itse [3, s. 95-96]. Konstruktivismia käsittelevässä kirjallisuudessa usein puhutaankin oppimisen ohjaamisesta opettamisen sijaan. Sama näkökulma opettamisesta on nykyisen aktiivista ja oppilasjohtoista oppimista korostavien pedagogisten teorioiden taustalla, joissa opettajan tehtävän ajatellaan olevan oppimiselle suotuisien olosuhteiden luominen [5].

2.2 Metakognitio

Metakognition käsite on keskeisessä osassa, kun pyritään tunnistamaan tekijöitä, jotka johtavat syvällisempään oppimiseen. Sen merkitys korostuu varsinkin, kun digitalisoituva yhteiskunta vaatii yksilöltä yhä haastavampia taitoja itsenäiseen kykyyn ajatella ja ratkaista ongelmia. Myös Suomen koulutusjärjestelmässä on huomioitu kognitiivisten ja metakognitiivisten taitojen

tärkeys. Vuoden 2014 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa metakognitiiviset ja kriittisen ajattelun taidot mainitaan yhtenä seitemästä laaja-alaisen osaamisen taidoista [6, s. 20-21]. Metakognitiolla tarkoitetaan henkilön tietoisuutta kognitiivisista toiminnoistaan, kuten ajatuksista, tietämisestä ja oppimisesta. Metakognitio jaetaan kahteen osaan, metakognitiiviseen tietoon ja taitoon, joskin tarkka jako on monissa tapauksissa vaikea tehdä. Tutkimuksissa on käynyt ilmi, että metakognitiivisen tiedon ja taidon yhteisvaikutus itsenäisten vaikutusten sijaan on merkityksellisempää syvällisen oppimisen kannalta. [4, s. 40-47]

Metakognitiivisella tiedolla tarkoitetaan sekä oman että muiden ajattelun tiedostamista. Sen avulla henkilö pystyy esimerkiksi tunnistamaan omat vahvuutensa ja heikkoutensa sekä niihin johtavat tekijät. Henkilö osaa soveltaa erilaisia oppimistyyplejä tehtävän vaatimalla tavalla, mutta myös tunnistaa itselleen parhaimmat oppimisen tavat. Tehtävänratkaisussa metakognitiivinen tieto vaikuttaa käsityksiin sekä itse tehtävästä että sen ratkaisustrategioista. Kun henkilö tarkoituksenmukaisesti käyttää hyväkseen käsitystään ajattelusta ja sen prosesseista, on kyseessä *metakognitiivinen taito*. Se on siis kykyä arvioida, säädellä ja valvoa tiedonmuodostusta ja oppimisprosesseja. Tiedonkäsittelyprosessin tietoisesta säätelystä ja ohjailusta johtuen metakognitiivista taitoa kutsutaankin usein oppimisen osaamiseksi. Tehtävänratkaisutilanteessa metakognitiivinen taito näkyy suunnitelmallisuutena ennen itse ratkaisuprosessia. Tällöin henkilö pystyy ennakoimaan, mitkä ovat tehtävän vaatimukset ja mitä asioita suorituksessa tulee ottaa huomioon. Ennako-odotusten perusteella voidaan analysoida eri ratkaisustrategioiden sopivuutta ja tuloksellisuutta. [4, s. 40-47]

Koska kaiken oppimisen kannalta metakognitiivinen ajattelu on niin merkityksellistä, on sen kehittämisen keinojakin tutkittu laajasti. Tutkimukset osoittavat, etteivät metakognition tiedot ja taidot harjaannu itsekseen ilman tietoista päätöstä kehittää niitä. Tällöin metakognition kehittymiseen tarkoituksenmukaisesti pyrkivän oppimisympäristön merkitys korostuu. Kun ohjaaja tukee oppilaan ajatteluprosessia tarkoituksenmukaisesti niin, että oppilas tämän perusteella pystyy luomaan oman ratkaisunsa, on kyseessä *scaffolding* eli *oppimisen ohjattu tukeminen*. Oppimisen ohjattu tukeminen perustuu Lev Vygotskyn vuonna 1978 esittämään käsitteeseen *lähikehityksen vyöhyke*, jolla tarkoitetaan aluetta oppilaan nykyisen ja potentiaalisen osaamisen välillä. Tällä alueella kehittyneemmän ohjaajan avustamana oppilas pystyy ratkaisemaan sen tason tehtäviä, joihin hän ei itsenäisesti pystyisi. Metakognitiivisten kykyjen kehittyminen vaatii toimimista korkeamman tason metakognitiivisten tehtävien parissa lähikehityksen vyöhykkeellä ja te-

hostuu erityisesti silloin, kun oppilas on aktiivisesti mukana suunnittelu- ja arviointiprosessissa. [4, s. 40-50]

2.3 Matemaattinen taito

Perinteisesti matemaattinen osaaminen on jaettu kahteen osaan: proseduraaliseen taitoon ja konseptuaaliseen tietoon. Proseduraalisella taidolla tarkoitetaan mekaaniseen laskemiseen liittyvää osaamista, kuten laskusääntöjen hallintaa ja kykyä noudattaa algoritmin vaiheita ennalta määrättyssä järjestyksessä. Tällaista menetelmällistä taitoa on esimerkiksi yhtälönratkaisu, jossa henkilö suorittaa peräkkäisiä proseduureja ongelman ratkaisemiseksi. Lisäksi taitoon kuuluu kyky yleistää tunnetut algoritmit ja toimintatavat koskemaan toisia matemaattisia kokonaisuuksia. Menetelmällisen taidon lisäksi proseduraalista taitoa on kyky tulkita ja käyttää käsitteiden symbolisia esityksiä. Symbolisilla esityksillä ei kuitenkaan tarkoiteta ainoastaan yksittäisten matemaattisten merkkien tulkintaa, vaan kyse voi olla myös laajemmista esityksistä, kuten taulukoista ja kuvaajista. Proseduraalisen taidon kehittämisen tavoitteena on mekaaninen sujuvuus algoritmien käytössä ja matemaattisen tekstin tulkinnessa. [3, s. 58-59]

Konseptuaalinen eli käsitteellinen tieto sen sijaan on vaikeammin rajattavissa osittain sen laajuuden ja yleisyyden vuoksi. Sillä tarkoitetaan tiedon osien välisten riippuvuuksien ja matemaattisten käsitteiden välillä vallitsevien relaatioiden ymmärtämistä. Laaja käsitteellinen tieto helpottaa oppimista, sillä tiedon järjesteleminen yhtenäiseksi kokonaisuudeksi mahdollistaa uusien ideoiden liittämisen aiempaan tietoon. [3, s. 51-57]. Kilpatrick ym. kuvailevat konseptuaalista ymmärrystä kokonaisvaltaiseksi ja käytännölliseksi käsitykseksi matemaattisista ideoista. Oppilaat, joilla on konseptuaalista tietoa matemaattisista kokonaisuuksista, ymmärtävät, miksi jokin matemaattinen idea on tärkeä ja millaisissa konteksteissa sen käyttö on hyödyllistä. [2, s. 115-133]. Käsitteellisen tiedon laaja hallinta mahdollistaa matemaattisen käsitteistön soveltamisen todellisiin luonnonilmiöihin ja toisaalta ilmiöiden matemaattisen mallintamisen. Konseptuaalinen tieto näkyy muun muassa kykynä yhdistää samankaltaiset esitykset toisiinsa. Tällöin oppilas ymmärtää esimerkiksi funktion lausekkeen, kuvaajan ja taulukoitujen pisteiden olevan saman asian erilaisia esitystapoja ja pystyy sujuvasti kääntämään esitystapoja toisikseen. [3, s. 51-57]

Kahtiajako proseduraaliseen tietoon ja konseptuaaliseen taitoon on kuitenkin melko yksipuolinen eikä ota huomioon kaikkia matemaattiseen taitoon liittyviä tekijöitä. Vaikkei mikään yksittäinen käsite voi käsittää kaikkia ma-

temaattisen osaamisen näkökulmia, Kilpatrick ym. esittelevät termin *matemaattinen taitavuus* (engl. mathematical proficiency), jolla he pyrkivät kattamaan mahdollisimman suuren osan matemaattisen asiantuntijuuden, kompetenssin, tiedon ja sujuvuuden aspekteista. He vertaavat matemaattista taitavuutta köyden rakenteeseen, jossa viisi toisiinsa kietoutunutta komponenttia, tai *säiettä*, muodostavat sen kompleksisen kokonaisuuden:

- 1) konseptuaalinen ymmärrys (engl. conceptual understanding)
- 2) proseduraalinen sujuvuus (engl. procedural fluency)
- 3) strateginen kompetenssi (engl. strategic competency)
- 4) mukautuva päättely (engl. adaptive reasoning)
- 5) yritteliäisyys (engl. productive disposition).

Kilpatrick ym. esittämä strategisen kompetenssin käsite on lähellä kirjallisuudessa laajasti tarkasteltua matemaattista ongelmanratkaisukykyä. Pelkän ratkaisukyvyn lisäksi he huomioivat myös kyvyn muodostaa ja esittää ongelmia. [2, s. 115-133]. Matemaattinen ongelma eroaa tavanomaisesta rutiinitehtävästä siten, ettei oppilaalla ole sen ratkaisemiseksi valmista ratkaisustrategiaa tai algoritmia. Tällöin oppilaan tulee soveltaa tuttuja menetelmiä, tietoja ja sääntöjä uudella tavalla tai uudessa tilanteessa. Ongelmanratkaisuun liitetään usein myös luovuus ja luova ajattelu, joilla tarkoitetaan kykyä tuottaa uutta ja ennalta-arvaamatonta. [3, s. 16-25]. Tällainen joustavuus ongelmanratkaisussa voi kehittyä vain tekemällä muitakin kuin rutiininomaisia tehtäviä [2, s. 115-133].

Jaottelun neljäs säie, mukautuva päättely, ei rajoitu ainoastaan formaaliin todistamiseen ja deduktiivisen päättelyn muihin muotoihin, vaan se sisältää myös informaalin selittämisen ja intuitiivisen sekä induktiivisen päättelyn. Mukautuvalla päättelyllä viitataan kykyyn ajatella loogisesti käsitteistä ja tilanteista. Tällainen päättely on peräisin huolellisesta vaihtoehtojen punnitsemisesta ja sisältää tiedon siitä, miten lopputulos on perusteltavissa. Kilpatrick ym. mukaan mukautuva päättely on kuin liima, joka pitää kaiken yhdessä ja ohjaa oppimista. [2, s. 115-133]. Deduktiivisilla taidoilla tiedetäänkin olevan suora yhteys syvempään käsitteelliseen ymmärrykseen, sillä päättelytilanteessa oppilas ei ainoastaan käytä matemaattista tietoaan, vaan laajentaa ja uudelleenjärjestää tästä tiedosta muodostuvia ideoita [7].

Kehittääkseen matemaattisen taitavuuden neljää ensimmäistä säiettä tulee opiskelijan ajatella matematiikan olevan ymmärrettävää, hyödyllistä ja vai-

van arvoista. Lisäksi oppilaan tulee luottaa itseensä tehokkaan matematiikan oppijana ja laskijana. Kilpatrick ym. huomioivatkin yritteliäisyyden ja motivaation yhtenä matemaattiseen taitavuuteen vaikuttavista osa-alueista. Heidän mukaansa oppilaan motivaatio kasvaa, kun hän kehittyy ja kokee onnistumisen tunteita muissa osa-alueissa, mutta korkea oppimismotivaatio tehostaa myös oppimisprosessia. Kilpatrick ym. ehdottavat, että tämä pätee myös muiden säikeiden välisiin suhteisiin. Matemaattisen taidokkuuden osa-alueita ei voi täysin erottaa toisistaan, koska säikeet eivät ole itsenäisiä. Ne edustavat matemaattisen taidon eri puolia ja ovat näin ollen riippuvaisia toisistaan, jolloin yhden osa-alueen kehittäminen vaikuttaa muidenkin säikeiden kehittymiseen. He kuitenkin huomauttavat, ettei matemaattinen taitavuus kokonaisuutena voi kehittyä keskittymällä vain muutamaaan säikeeseen. [2, s. 115-133]

2.4 Käsitteistä kokonaisuuksiin

Menetelmällistä taitoa on perinteisesti painotettu kouluopetuksessa sekä Suomessa [5] että muualla maailmalla [8], [9]. Tästä johtuen proseduraaliset taidot ovat korostuneet myös arvioinnissa, jolloin menestyminen matematiikan oppimisessa on tarkoittanut useimmiten sujuvuutta laskennallisissa proseduureissa. Proseduraalisia taitoja on korostettu silläkin kustannuksella, että oppiminen on saattanut jäädä pinnalliseksi. Yksipuolinen algoritmien ja ratkaisustrategioiden ulkoaopettelu ei edistä syvällistä ymmärtämistä, eikä kehitä matemaattisen taidon muita osa-alueita. [2, s. 115-133]. Nykyään matematiikan opetuksessa korostetaan yhä enemmän ymmärtävää oppimista ja matemaattinen ymmärrys on yksi tärkeimmistä opetuksen tavoitteista [10]. Mutta mitä matemaattisella ymmärryksellä oikeastaan tarkoitetaan, miten se voidaan saavuttaa ja miten se on mitattavissa?

Kirjallisuudessa matemaattista ymmärrystä on määritelty sen mukaan, mitä oppilas kykenee tekemään ymmärryksensä perusteella [5], [1]. Lakoma kirjoittaa, että jokainen luo oman matematiikkansa kolmen matemaattisen peruselementin, matemaattisen mallintamisen, päättelyn ja kommunikaation, varaan. Ymmärtääkseen todellisia luonnonilmiöitä oppilaan tulee pystyä kuvailemaan, yksinkertaistamaan ja löytämään ilmiöiden erityispiirteet. Tämän perusteella hän pystyy tekemään hypoteeseja, ennustuksia ja johtopäätöksiä sekä yleistämään ja todistamaan. Lopulta oppilas pystyy esittämään ja selittämään tuloksiaan muille. [1]. Oppilaan taitojen lisäksi kirjallisuudessa nousee esiin myös käsitteiden väliset suhteet matemaattisen ymmärtämisen indikaattorina. Simon on pyrkinyt jäsentelemään matematiikan ymmärtämisen luonnetta erottamalla toisistaan matemaattisen käsityksen ja käsitteen

termit. Hänen mukaansa matemaattinen käsitys on tutkijan tai opettajan luoma teoreettinen malli, jonka avulla voidaan selittää oppilaan havainnoituja kykyjä ja rajoituksia liittyen hänen ymmärrykseensä tietystä aiheesta. Matemaattisen käsitteen Simon kuvailee koostuvan matemaattisista objekteista ja niiden välisistä suhteista. Lisäksi käsitteen hallitseminen sisältää näiden suhteiden ymmärtämiseksi vaaditut loogisen päättelyn taidot. [10]

Simonin ja Tzurin mukaan matemaattiseen ymmärrykseen johtavaa prosessia voidaan pyrkiä selvittämään ymmärtämällä paremmin matemaattisen käsitteen oppimista. He jakavat käsitteen oppimisen kahteen vaiheeseen perustuen siihen, missä tilanteissa oppilas osaa käyttää ymmärrystään matemaattisesta käsitteestä. Kun oppilas on oppinut odottamaan tiettyä tulosta jonkin aktiviteetin seurauksena, on hänen käsitteellinen oppimisensa *osallistuvassa vaiheessa* (engl. participatory stage). Tässä vaiheessa oppilas saattaa pystyä selittämään tapahtuman, mutta tieto on käytössä vain niissä tilanteissa, kun oppilas muistelee tai toistaa aktiviteettia. Käsitteen oppimisen toisessa *ennustavassa vaiheessa* (engl. anticipatory stage) tiedon käyttö ei enää rajoitu niihin tilanteisiin, joissa ne on opittu, vaan oppilas on luonut abstraktion opitusta suhteesta tapahtuman ja tuloksen välillä. Tällöin kyseinen suhde on käytettävissä matemaattisen objektin tavoin. [11]

Kilpatrick ym. laajentavat Simonin ja Tzurin ajatusta suhteen objektivoinnista myös käsitteiden välisiin suhteisiin. Heidän mukaansa avain ymmärtävään oppimiseen on oppilaan omat skeemat eli se, miten oppilas esittää ja yhdistää tiedon osia. Matemaattisten käsitteiden välisten suhteiden ja niiden hierarkisen rakenteen muodostuminen luo jäsentyneitä matemaattisia kokonaisuuksia. Tällaisista käsitteellisistä kokonaisuuksista on hyötyä, kun uusia matemaattisia käsitteitä pyritään lisäämään rakenteisiin. Sen lisäksi, että kokonaisuustavoitteinen oppiminen helpottaa uuden tiedon rakentumista, edistää hyvin organisoitu tieto myös informaation palauttamista muistiin. [2, s. 115-133]

Ymmärtävään oppimiseen tähtäävien opetustapojen löytämisen lisäksi matemaattista ymmärrystä korostava oppiminen luo monia uusia haasteita myös oppimista arvioivien kokeiden muodostamiselle. Simonin mukaan pyrkimyksestä mitata matemaattista ymmärrystä seuraa kaksi merkittävää haastetta. Yhtäältä on vaikea määritellä arvioinnin kohteena olevaa tietoa ja toisaalta arvioida, onko tehtävästä saatu oikea ratkaisu tulosta käsitteen ymmärtämisestä vai luokassa opetellusta ratkaisustrategiasta. Matemaattisen ymmärryksen tavoittelemiseksi Simon esittelee artikkelissaan matemaattisen käsitteen uutena potentiaalisena pedagogisena tavoitteena. Hänen mukaansa

muutos oppimistavoitteissa voi ratkaista molemmat hänen esittämistään ongelmista. Oppimistavoitteen muuttumisen seurauksena myös arvioinnin kohde tarkentuu tehtävätyyppispecifin ratkaisun tuottamisen sijaan käsitteiden edustamien suhteiden hallintaan. Yksittäinen matemaattinen käsite ei liity mihinkään tiettyyn tehtävätyyppiin, jolloin pedagogisen tavoitteen saavuttamista ei rajoita oppilaan kyky oppia kyseistä tehtävää. Tällöin voidaan ajatella, että kaikki käsitteeseen liittyvät tehtävät ovat sopivia ymmärtämisen mittaamiseen. Erityisesti kun matemaattisen suhteen käsitteellinen ymmärrys on siirtynyt Simonin ja Tzurin esittämään ennustavaan vaiheeseen, näkyy ymmärtäminen kykynä soveltaa tietoa myös uusiin, opetustilanteen ulkopuolisiin tehtäviin. [10]

Edellä esitettyjen argumenttien perusteella näyttäisi siltä, että matemaattinen kokonaisuus pedagogisena tavoitteena on ihanteellinen ja keskittyminen erilaisten matemaattisten suhteiden ymmärtämiseen on vastaus ymmärtävään oppimiseen. Ne eivät kuitenkaan ota kantaa muihin oppimiseen vaikuttaviin tekijöihin, kuten metakognitioon tai ympäristön vaikutukseen. Luvussa 2.2 huomautettiin metakognitiivisten kykyjen tapauksessa, etteivät ne kehity itsenäisesti ilman tietoista päätöstä kehittää näitä taitoja. Näin ollen pelkkä matemaattisen ymmärtämisen käsittely riittää kokonaisvaltaisen matematiikan oppimisen tarkasteluun. Tästä johtuen jatkossa matemaattisen kokonaisuuden ymmärtämisen katsotaan, Simonin ajatuksia mukaillen, olevan opetuksen pedagoginen tavoite, mutta ei kuitenkaan ainoa huomionarvoinen asia opetuksessa.

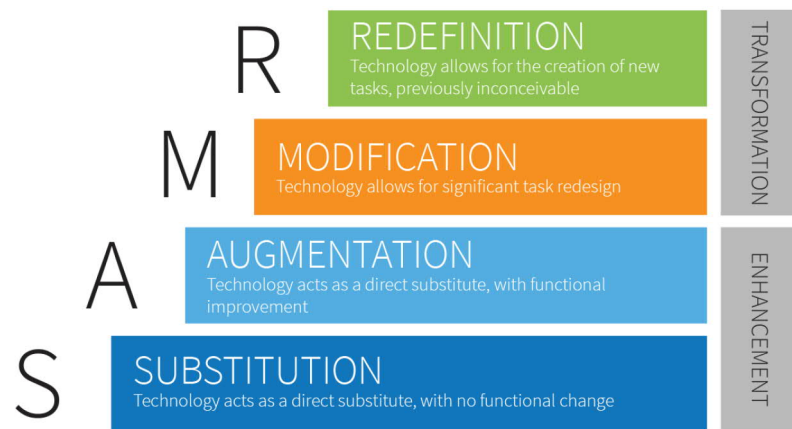
3 Teknologia opetuskäytössä

Termillä *teknologiset apuvälineet* viitataan kaikkiin opetuksessa käytettäviin tekniisiin ja sähköisiin apuvälineisiin, kuten interaktiivisiin valkotauluihin, digitaalisiin materiaaleihin tai virtuaalisiin oppimisympäristöihin. Teknologinen apuväline voi olla joko pedagogiseen käyttöön suunniteltu tai johonkin muuhun tarkoitukseen luotu työkalu. Viime aikoina teknologisilla apuvälineillä on tarkoitettu yhä useammin opetuksessa käytettyjä ohjelmistoja [12].

Nykyään Suomessa teknologian käyttö on osa koulujen arkea. Tieto- ja viestintäteknologinen osaaminen mainitaan vuoden 2014 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa yhtenä seitsemästä laaja-alaisen osaamisen tavoitteesta [6, s. 20-24]. Matematiikan oppiainekohtaisessa opetussuunnitelmassa todetaan, että "tieto- ja viestintäteknologiaa, kuten taulukkolaskentaa ja dynaamista geometriaohjelmistoa, hyödynnetään opetuksen, oppimisen, tuottamisen, arvioinnin sekä luovuuden välineenä" [6, s. 376]. Lukioissa matematiikan oppiaine siirtyi sähköisten ylioppilaskokeiden piiriin keväällä 2019, jolloin opetuksessakin käytetään välineinä erilaisia havainnollistus- ja laskinohjelmistoja.

Teknologiaa voidaan lisätä opetukseen monin eri tavoin riippuen sen käyttö-tarkoituksesta. Osa teknologisista interventioista on hienovaraisempia oppimista tukevia ja helpottavia lisäyksiä, kun taas toiset muokkaavat oppimisprosessia merkittävämmiin. Eriasteisten teknologisten interventioiden analysoimiseksi Puentedura on kehittänyt SAMR-taksonomian (Substitution, Augmentation, Modification, Redefinition), jonka hierarkkinen lajittelu perustuu siihen, millä tasolla matematiikan opettaminen muuttuu intervention seurauksena (ks. kuva 1). [13]

SAMR-malli jakautuu kahteen pääkategoriaan, *muuntamiseen* (engl. transformation) ja *paranteluun* (engl. enhancement), joista jälkimmäinen on hierarkiassa alempana ja muovaa oppimista maltillisemmin. Parantelun kategoria sisältää alaluokat *korvaaminen* (engl. substitution) ja *tehostaminen* (engl. augmentation). Korvaamisella tarkoitetaan jonkin työkalun vaihtamista vastaavaan teknologiseen työkaluun ilman suurta funktionaalista muutosta. Tähän kategoriaan kuuluu esimerkiksi digitaaliset etäoppitunnit ja sähköiseksi muutettu oppimismateriaali. Tehostettu työkalu sen sijaan tarjoaa joitakin uusia mahdollisuuksia vanhaan verrattuna. Tällaisia opetustyökaluja ovat esimerkiksi erilaiset geometriaohjelmistot, kuten *GeoGebra*. Geometriaohjelmistot mahdollistavat muun muassa funktioiden ominaisuuksien, kuten kulmakertoimien ja nollakohtien, laskemisen. [13]



Kuva 1: Teknologisten interventioiden SAMR-malli [35].

Toiseen pääkategoriaan, muuntamiseen, lukeutuu niin ikään kaksi alaluokkaa, mutta parantelevista teknologisista interventioista poiketen ne muuttavat opetustapaa kokonaisvaltaisemmin. *Muokkaamisella* (engl. modification) tarkoitetaan huomattavien muutosten tekemistä tehtäviin sekä aktiviteetteihin. Tähän tarkoitukseen dynaamisesti manipuloitavat geometriaohjelmistot tarjoavat mahdollisuuksia esimerkiksi kolmiulotteisten objektien ominaisuuksien tutkimiseen ja muovaamiseen. Viimeisenä SAMR-hierarkian ylin taso, *uudelleenmäärittely* (engl. redefinition), viittaa mahdollisuuteen suunnitella aiemmin saavuttamattomia tehtäviä. [13]. Tällaisia tehtäviä voidaan luoda esimerkiksi virtuaalisiin oppimisympäristöihin, jotka mahdollistavat oppilaan taitotasolle räätälöidyt tehtävät ja oppimispolut [14].

Puenteduran mukaan teknologian integroinnilla tulisi pyrkiä SAMR-hierarkian ylimpään tasoon [13]. Puenteduran lisäksi muutkin ovat tehneet samankaltaisia havaintoja teknologisista apuvälineistä. Rasilan, Malisen ja Tiitun mukaan pelkkä oppikirjojen ja laskutehtävien muuttaminen digitaaliseen muotoon ei takaa edistyksellistä oppimista, vaan teknologian integrointi toimii parhaiten, kun sen avulla tehdään asioita, jotka ilman teknologiaa olisivat vaikeita tai jopa mahdottomia [5]. Zulnaid ja Zamri kirjoittavat, että teknologian lisäämisen opetukseen tulee olla harkittua ja tehdään vain silloin, kun siitä on hyötyä verrattuna siihen, että sitä ei tehtäisi [9]. Puenteduran mukaan tämä vaatii opettajalta *teknologis-pedagogista sisältötietoa* (engl. TPACK, Technological Pedagogical and Content Knowledge), eli tietoa siitä, mitkä pedagogiset ja teknologiset keinot sopivat parhaiten tietyn aihealueen käsittelyyn [13].

4 Teknologian vaikutus matemaattisten kokonaisuuksien oppimiseen

Tutkimusten mukaan teknologian lisääminen opetukseen voi poistaa joitakin yleisiä matematiikan opetukseen ja oppimiseen liitettäviä ongelmia. Vaikka teknologiset apuvälineet tunnustetaan oppimista edistävinä työkaluina ja niiden käyttö on viime vuosina lisääntynyt, teknologian koko potentiaalia ei kuitenkaan vielä täysin hyödynnetä. [15]. Kuten luvussa 3 käsiteltiin, teknologian onnistunut integraatio matematiikan opetukseen riippuu pitkälti opettajan teknologis-pedagogisesta sisältötiedosta. Yhdeksi tärkeimmistä tekijöistä on osoittautunut käsitys siitä, mitä pedagogista tarkoitusta varten teknologisia apuvälineitä käytetään ja mitä niiden käytöllä pyritään saavuttamaan. Tässä luvussa tarkastellaan kirjallisuuden pohjalta, mitä ovat oppimisen, oppimisympäristöjen ja matemaattisen taidon erityispiirteet ja miten teknologia-avusteisesti voidaan tähdätä juuri näiden piirteiden kehittämiseen.

4.1 Oppimisen tukeminen ja sosiaalinen ympäristö

Matemaattisen kokonaisuuden oppiminen on monitahoinen prosessi, johon vaikuttaa niin sisäiset kuin ulkoisetkin tekijät. Näin ollen oppimisympäristön merkitystä ei voida jättää huomiotta, kun tarkastellaan oppimiseen vaikuttavia tekijöitä. Kirjallisuudessa oppimisympäristöihin liittyen esiin nousee erityisesti erilaiset tukemisen muodot. Luvussa 2.1 keskusteltiin lähikehityksen vyöhykkeestä, joka voidaan saavuttaa oppimisen ohjatulla tukemisella. Lähikehityksen vyöhykkeellä oppiminen tapahtuu kaikkein tehokkaimmin, kun tehtävien vaikeustaso on oppilaan taitotasoon nähden sopivan haastava. Haastavuuden tunne voi rohkaista oppilasta syvällisempään tiedon prosessointiin, mikä näkyy parantuneina oppimistuloksina [4, s. 72-73]. Lisäksi oppilas haastaa itseään yhä vaativammalle tasolle [16]. Tehtävien vaikeustasoa säätämällä voidaan löytää kullekin oppilaalle ominainen tasoalue. Arroyo, Woolf, Burelson, Muldner, Rai ja Tai kirjoittavat artikkelissaan adaptiivisista tuutorointijärjestelmistä, jotka pyrkivät pitämään oppilaan lähikehityksen vyöhykkeellä. Tällaiset oppilaan toimintaan mukautuvat järjestelmät päättelevät muiden muassa oppilaan aiemmasta suoriutumisesta ja vaikeuksia tuottaneista aihealueista sopivan tehtävätason ja antavat oppilaalle tehtäviä sen mukaisesti. Ohjelmalta on myös mahdollista pyytää vihjeitä, jolloin järjestelmä toimii kehittyneempänä oppimisen ohjaajana. [14]

Matemaattisen käsitteen ymmärtämiseksi aihe tulee käydä läpi monta kertaa, minkä seurauksena siihen liittyvät kognitiiviset perusprosessit, kuten muis-

taminen ja mieleen palauttaminen, tulevat automaattisiksi. Tällöin osa oppilaan kognitiivisesta kuormituksesta vapautuu uuden asian havainnointiin ja oppimiseen. [5]. Kognitiivista kuormitusta voidaan poistaa myös opetuksen aikana tehostamalla oppimisen ohjattua tukemista. Tämä voidaan tehdä *kognitiivisten tukien* avulla, jotka viittaavat varsinkin teknologian mahdollistamiin tukirakenteisiin. Niiden tarkoituksena on avustaa oppilasta suoriutumaan kognitiivisesta tehtävästä esimerkiksi poistamalla osan alemman tason kognitiivisesta kuormituksesta. Esimerkkinä tällaisesta tilanteesta on virtuaaliset oppimisympäristöt ja simulaatiot, jotka vähentävät muistin kuormitusta ja näin mahdollistavat korkeamman tason ajattelun. Poistamalla osan matalamman tason kuormituksesta oppilaan on mahdollista päästä käsiksi korkeamman tason toimimiseen kuin ilman kognitiivisia tukia. Kognitiivisiin tukiin kuuluu olennaisena osana, että niiden määrä perustuu oppilaan taitotasoon. Teknologisissa oppimisympäristöissä tietokone arvioi jatkuvasti oppilaan suoritusta ja sen perusteella määrittää kognitiivisten tukien tarpeen. [4, s. 49-50]

Oppimisen ohjattua tukemista voidaan hyödyntää myös metakognition kehittämässä, sillä muun oppimisen tavoin senkin kehitys tehostuu lähikehityksen vyöhykkeellä [4, s. 48-50]. Kuten luvussa 2.1 todettiin, metakognitio ei kehity itsekseen ilman siihen tähtääviä tehtäviä. Kirjallisuudessa tutkimusta onkin tehty varsinkin erilaisten interaktiivisten ja adaptiivisten tuutorointijärjestelmien kontekstissa, sillä niiden ominaisuuksia käyttäen pystytään luomaan metakognitiota kehittäviä tehtävätyyppejä. Arroyo ym. mukaan metakognition kehittämiseen voidaan ottaa kaksi eri näkökulmaa: metakognition opettaminen ja tukeminen. Heidän mukaansa metakognition tukemisella pyritään tehostamaan oppimista ja sen tuloksia, jolloin metakognitiiviset taidot itsessään eivät kehity. Metakognition opettaminen sen sijaan tähtää metakognitiivisten kykyjen kehittymiseen ja mahdollisuuteen käyttää taitoja myös ilman oppimisen tukia. Metakognition oppimiseen tähtäävä opetus hyödyttää erityisesti huonosti suoriutuvia oppilaita, sillä heikkojen oppimistulosten taustalla saattaa olla metakognitiivisten tietojen ja taitojen puute. [14]

Kirjallisuudessa teknologisten apuvälineiden metakognitiota kehittäviä ominaisuuksia on tutkittu paljon. Arroyo ym. kokoavat yhteen näistä tärkeimpiä näkökulmia adaptiivista tuutorointijärjestelmää, *Wayang Outpostia*, käsittelevässä artikkelissaan [14]. Heidän tekstinsä keskittyy erittelemään kyseisen ohjelmiston ominaisuuksia, mutta vastaavanlaisia toimintoja löytyy muistakin matemaattisista ohjelmistoista, kuten STACK-oppimisympäristöstä [5]. Arroyo ym. esittävät artikkelissaan itsesäätelyn taitojen olevan keskeisessä osassa, kun metakognitiota pyritään kehittämään. Heidän mukaansa itse-

säätelyn taitoja on mahdollista oppia adaptiivisten tuutorointijärjestelmien edistymisen seuraamiseen tarkoitettuja ominaisuuksien kautta. Oppimisessa edistymistä voidaan seurata edistymisnäkymissä, joista oppilas näkee aihealueittain oman kehittymisensä ja suoriutumisensa tason. Tämän perusteella hän valitsee opiskeltavia kokonaisuuksia ja tehtävien vaikeustason. Ohjelmiston ominaisuudet mahdollistavat myös tavoitteiden asettamisen ja niiden saavuttamisen seuraamisen. Edistymistä on mahdollista seurata myös tehtävien tekemisen aikana. Tällöin järjestelmä analysoi oppilaan sitoutumista tehtävien tekemiseen niihin käytetyn ajan, vihjeiden käytön ja suorituksen perusteella, minkä mukaan oppilas saa tasaisin väliajoin joko edistymistä esittäviä kaavioita tai oppimistapoihin liittyviä vinkkejä. Adaptiivisten tuutorointijärjestelmien metakognitiota kehittävä vaikutus perustuu siihen, että kun oppilaat valitsevat tehtäviä oman osaamisensa perusteella, saavat he enemmän vastuuta omasta oppimisestaan ja pystyvät kontrolloimaan sitä. [14]

Aikaisemmat proseduraalista kykyä korostavat oppimistavoitteet ja opetusmenetelmät katsovat oppimisprosessia yksilökonstruktivismiin kannalta. Nykypäivänä kuitenkin keskustelevala ja aktiivinen opetustapa tekee oppimisen sosiaalisesta luonteesta yhä merkityksellisemmän osan prosessia. Oppimisympäristöä koskevien tutkimusten tulokset viittaavat yhä useammin sosiokonstruktivistisia oppimiskäsityksiä mukailevaan suuntaan ja *yhteisöllinen oppiminen* huomioidaan yhtenä merkittävimmistä oppimiseen vaikuttavista tekijöistä. Oppimisen kulttuurista ja sosiaalista puolta pidetään jopa edellytyksenä korkeamman tason ajatusprosesseille [17].

Vaikka teknologian tuominen sosiaalisen vuorovaikutuksen välineeksi voikin tuntua enemmän etäännyttävän oppilaan yhteisöllisestä toiminnasta kuin tiivistävän sitä, on sen positiivisista vaikutuksista tehty monia tutkimuksia. Erilaiset sosiaalisen median alustat ja verkkopohjaiset oppimisympäristöt tarjoavat mahdollisuuksia helppoon sisällönjakamiseen ja keskusteluun. Muun muassa Darai on tehnyt tutkimusta Facebookin virtuaalisen oppimisympäristön käytöstä. Tutkimuksen mukaan Facebookin käyttö tiedon jakamiseen ja siitä keskustelemiseen paransi niin oppilaiden tyytyväisyyttä opintoihinsa kuin myös heidän oppimistuloksiaan. [18]. Yhteisöllisen oppimisen tarkoituksena ei kuitenkaan ole ainoastaan jakaa tietoa, vaan myös luoda sitä yhteistyössä muiden kanssa. Erityisesti tähän luomisprosessiin teknologia tarjoaa oppimista tehostavia apuvälineitä.

Yhteisöllisen oppimisen kannalta virtuaalisissa oppimisympäristöissä erityisen tärkeäksi muodostuu käydyn keskustelun rakenne. Sähköisissä ympäris-

töissä keskustelua käydään viestein, jolloin viestin kirjoittajan tulee kiinnittää huomiota sekä viestinsä sisältöön että selkeyteen [4, s. 134-139]. Tämä ominaispiirre voidaan nähdä joko etuna tai haittana, sillä viestien tarkka harkitseminen vaatii kirjoittajaltaan kykyä perustella mielipiteitään ja ajatuksiaan, mutta toisaalta samalla saattaa estää spontaanin keskustelun muodostumista. Iiskala, Vauras ja Lehtinen kirjoittavat vertaisoppimista käsittelevässä artikkelissaan, että yhteistyössä tuotettu matemaattinen ongelmanratkaisu on usein tehokkaampaa kuin yksilötyöskentely. He ehdottavat tämän johtuvan siitä, että vuorovaikutteisessa ongelmanratkaisussa oppilailla on parempi työskentelyn kontrolli ja siten metakognitiivisia taitoja hyödynnetään prosessissa. Erilaisia näkökulmia ja mahdollisia virhekäsityksiä on mahdollista kumota keskustelun avulla, kun omia ajatuksia tulee selittää ja perustella. [17]. Kirjallisuudessa puhutaankin tällaisen sosio-kognitiivisen konfliktin suuresta merkityksestä oppimisprosessissa [4, s. 126-127].

Sen lisäksi, että sosiaalinen vuorovaikutus huomioidaan oppimisprosessin yhtenä merkittävänä tekijänä, myös aiemmin yksilölliseen oppimiseen liitetyt käsitteet ovat saaneet uusia sosiaalisia piirteitä. Metakognitioon on aiemmin suhtauduttu vain yksilön ominaisuutena, joskin ryhmätilanteessa nousee esiin sellaisia metakognitiivisia aspekteja, joita ei voida määritellä vain yksilön oman oppimisprosessin kautta. Iiskala ym. määrittelevät ilmiön *sosiaalisesti jaetuksi metakognitioksi*. Heidän mukaansa sosiaalisissa oppimistilanteissa muun muassa yhteisen muistin säätely, kognitiivisten prosessien sosiaalisen puolen tarkkailu ja kyky ymmärtää muiden ajattelua ja tulkintaa tilanteesta ovat esimerkkejä siitä, miten sosiaalisesti jaettu metakognitio näkyy ja kehittyy ryhmätilanteessa. He esittävät, että hyvät itsesäätelyn taidot ovat taustalla myös sosiaalisen säätelyn kehittymisessä. [17]

Koska kaikilla oppilailla ei kuitenkaan ole yhtä laajoja itsesäätelyn ja -ohjautuvuuden taitoja, sosiaalisissa ongelmanratkaisutilanteissa esiintyvät metakognitiivinen vuorovaikutus on harvoin spontaania. Tällöin oppilaat saattavat tarvita ohjausta esimerkiksi siinä, miten tulisi keskustella ja tehdä yhteistyötä. Chenin ja Chiun mukaan vastauksena ohjauksen tarpeeseen voidaan käyttää vuorovaikutusprosessien vaiheistamista (engl. collaboration scripts), joka toimii ikään kuin yhteisöllisen oppimisen käsikirjoituksena. Vaiheistamisessa nimensä mukaisesti ryhmätyöskentely jaetaan vaiheisiin, joissa oppilaat suorittavat tehtäviä liittyen esimerkiksi ongelman tiivistämiseen ja mahdollisten virhekäsitysten havaitsemiseen. Chen ja Chiu kirjoittavat, että tällainen vaiheistaminen sopii erityisesti virtuaalisiin oppimisympäristöihin, joissa tehtäviä ja erilaisia rooleja on helppo jakaa oppilaiden kesken ja valvoa niin, että varmistetaan kaikkien osallistuminen. [19]

Vaikka adaptiivisten tuutorointijärjestelmien ja muiden virtuaalisten oppimisympäristöjen käyttäminen opetuksessa tarjoaa monipuolisia mahdollisuuksia metakognitiivisten taitojen kehittämiseen, liittyy sen käyttöön myös joitakin ongelmia. Jotkin oppimisympäristöt saattavat antaa oppilaille niin runsaasti valinnanvapautta ja tukivaihtoehtoja, että heikosti itseohjautuvat oppilaat voivat kohdata ongelmia jo ennen itse oppimisen alkamista. Myös tuutorointijärjestelmien tuen tarpeen määrittäminen saattaa pahimmassa tapauksessa jopa rajoittaa oppimista, kun järjestelmän antamat pinnalliset vihjeet johtavat vain laskun mekaaniseen laskemiseen. [4, s. 53-54]. Arrayo ym. määrittelevät tehtävien tekotapaan liittyvän *pelaamiskäyttäytymisen* (engl. gaming) käsitteen, millä he tarkoittavat oppimisympäristön ominaisuuksien, kuten vihjeiden, väärinkäyttöä ja vastausten arvailua, jolloin tavoitteena on oikeiden vastausten tuottaminen matemaattisen käsitteen oppimisen sijaan. Arrayo ym. kirjoittavat tällaisen sitoutumattomuuden taustalla olevan usein heikot itsesäätelyn taidot ja ehdottavatkin, että näissä tilanteissa tulisi hyödyntää virtuaalisten oppimisympäristöjen motivaatiota ja sitoutumista edistäviä ominaisuuksia itsesäätelyn taitojen kehittämiseksi. [14]

Keskustelua on käyty myös virtuaalisten opetusympäristöjen ja dynaamisten geometriaohjelmistojen konkrettisuuden puuttumiseen. Kirjallisuudessa ehdotetaan, että varsinkin nuoret lapset konstruoivat tietoa sosiaalisen vuorovaikutuksen ja fyysisen materiaalin kautta, eivätkä tietokoneiden symboliset esitystavat vastaa tätä oppimistyyliä. Oppimisympäristöjen konkrettisuuteen liittyy myös kysymys siitä, pystyykö lapsi siirtämään teknologisissa oppimisympäristöissä saamansa tietotaidon paperille vai ovatko hänen kykynsä rajoittuneet teknologisessa ympäristössä toimimiseen. Symbolisen ja konkreettisen ympäristön suhdetta ovat tutkineet Steen, Brooks ja Lyon virtuaalisten manipulatiivien tapauksessa. Heidän mukaansa lapsen konkrettisuuden käsityksessä on enemmän kyse siitä, mikä on lapselle mielekästä ja manipuloitavissa olevaa. He huomasivat, että virtuaalisten manipulatiivien avulla oppinut ryhmä pystyi näyttämään oppimansa perinteisessä testissä kynää ja paperia käyttäen. [16]. Tämänlainen tiedon soveltamisen taito on mahdollista Tzurin ja Simonin mukaan vasta käsitteen oppimisen ennustavassa vaiheessa (ks. luku 2.4). Tämän perusteella voidaankin todeta, ettei kyky siirtää tietoja virtuaalisista ympäristöistä konkreettisiin tapahdu oppimisen lomassa, vaan se vaatii tietoista keskittymistä opittavan käsitteen hallintaan.

4.2 Matemaattisen taidon kehittyminen

Seuraavaksi tarkastellaan teknologisten apuvälineiden vaikutusta matemaattisen taidon eri osa-alueiden kehittymiseen. Matemaattisen taidon erittelyn

pohjana käytetään luvussa 2.3 esitettyä Kilpatrickin ym. matemaattisen taidokkuuden viisisäikeistä jaottelua. Vaikka kaikki osa-alueet ovat yhteydessä toisiinsa ja usein yhden alueen kehittäminen vaikuttaa myös muiden kehittymiseen, voidaan matemaattisen taidon kustakin osiosta löytää sille tyypillisiä erityispiirteitä, joiden kehittymistä on mahdollista tehostaa teknologian ominaisuuksia apuna käyttäen.

Konseptuaalinen taito ja käsitteellinen muutos

Koska konseptuaalinen eli käsitteellinen tieto on erilaisten käsiterakenteiden ja -hierarkioiden havaitsemista ja hyväksikäyttöä, voidaan sitä pyrkiä myös kehittämään erilaisten käsitteiden välisten relaatioiden avulla. Ylä- ja aläksitteiden ymmärtäminen yhtenäisenä kokonaisuutena irrallisten objektien sijaan tehostaa konseptuaalisen tiedon muodostusta ja erityisesti silloin, kun oppilas itse etsii käsitteiden välisiä relaatioita, pohtii niiden hierarkiaa ja konstruoi relevantteja rinnakkaiskäsitteitä. [3, s. 115-116]

Suurempien kokonaisuuksien jakamista käsitteisiin ja näiden käsitteiden välisten hierarkioiden esittämiseen on käytetty käsitekarttoja jo yli 40 vuoden ajan. Käsitekartan hyödyllisyys perustuu visualisoitujen relaatioiden konseptuaalista ymmärrystä ja tiedon linkittymistä tukevaan vaikutukseen. Asianmukaisten alaluokkien, relaatioiden ja rinnastusten määrä viittaa suoraan laajempaan ymmärrykseen aiheesta. Tämän perusteella voidaan sanoa, että oppilaat, jotka luovat monimutkaisempia käsitekarttoja, ymmärtävät yksittäisen käsitteenkin paremmin. Erityisesti matematiikan opiskelussa käsitteet ja niiden hierarkia ovat suuressa osassa, sillä niiden perusteella voidaan yleistää sääntöjä koskemaan muitakin kuin opittua matemaattista käsitettä. [20]

Viimeaikoina teknologinen kehitys on mahdollistanut käsitekarttojen siirtymisen virtuaalisiin ympäristöihin, joissa relaatioiden määrää ja muokattavuutta ei rajoita fyysinen ympäristö. Tällaisen tietokoneavusteisen käsitekartan (CSCM Computer-Supported Concept Maps) vaikutuksia korkeamman tason oppimiseen ovat tutkineet muun muassa R. Royer ja J. Royer. Heidän tutkimuksessaan virtuaalisen käsitekartan rakentaminen paransi oppimistuloksia selkeästi tehokkaammin kuin käsin piirretty käsitekartta. Tutkimus näytti, että tietokoneella piirretyt kartat olivat monimutkaisempia ja oppilaat kokivat tietokoneen kanssa työskentelyn mielekkäämmäksi. Raportissa ehdotettiin tämän johtuvan siitä, että tietokoneen työkalut mahdollistivat selkeämmän kommunikoinnin ja käsitekartan muokkaamisen vaivattomammin, minkä seuraksena käsitteiden välisten relaatioiden löytäminen helpotui. [20]

Ymmärrys käsitteiden välisistä suhteista ei kehity ainoastaan visualisoimalla itse relaatioita, vaan sitä voidaan kehittää myös tehtävänteon lomassa. Zulnaidi ja Zamri tutkivat GeoGebra-ohjelmiston vaikutusta konseptuaaliseen tietoon ja huomasivat, että virtuaalisten manipulatiivien käyttö opetuksessa lisäsi käsitteellistä ymmärrystä matematiikasta. Heidän tutkimuksena mukaan erityisesti huonommin menestyvät hyötyivät teknologian käytöstä konseptuaalisen tiedon kehittämisessä. Tämän katsottiin johtuvan siitä, että abstraktien käsitteiden muuttaminen konkreettisempaan muotoon ja niiden liittäminen oikeisiin luonnonilmiöihin helpotti myös relaatioiden tekemistä muiden matemaattisten käsitteiden välille. [9]

Se lisäksi, että abstraktin käsitteen muuttaminen visuaaliseen ja manipuloitavaan muotoon helpottaa uuden matemaattiseen käsitteen oppimista, on tärkeä huomata, että matematiikassa käsite voidaan esittää usealla erilaisella tavalla. Opetuksessa saman käsitteen erilaiset esitystavat antavat mahdollisuuden uuden tiedon konstruointiin kaiken tasoille ja oppimistyylyltään erilaisille oppijoille. Tämän lisäksi useiden representaatioiden omaksuminen on välttämätöntä konseptuaalisen ymmärryksen kannalta, sillä käsitteellisen tiedon käyttäminen vaatii oppilaalta osaamisensa esittämistä mielekkäillä tavoilla. Tällaisen tiedon tulee esittää oppilaan omaa käsitteellistä ymmärrystä opeteltujen representaatioiden sijaan. Erilaisten esitystapojen linkittäminen toisiinsa voidaan nähdä yhtä tärkeänä kuin muidenkin tietorakenteiden suhteiden konstruointi, sillä esitysten välisten relaatioiden puuttuminen voi jopa estää oppimista. Algaic kirjoittaa artikkelissaan, että joustavuutta esitystapojen välillä voidaan pyrkiä opettamaan erilaisten ohjelmistojen avulla. Hänen mukaansa esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmien yksinkertaiset informaation muokkaamiseen ja esitystapojen välillä siirtymiseen tarkoitetut ominaisuudet tarjoavat tehokkaan apuvälineen, kun oppilas pyrkii konstruimaan omia representaatioitaan. Algaic kuitenkin huomauttaa, että monipuolisten käsite rakenteiden luomisessa on tärkeä kiinnittää huomioa siihen, että rakenteiden konstruktio on todenmukaista. Hänen mukaansa vääränlainen teknologian käyttö erityisesti useiden representaatioiden oppimisen yhteydessä saattaa myös luoda väärinkäsityksiä käsitteistä. [21]

Matematiikassa konseptuaalisen tiedon kehittymiseen liittyy oleellisesti käsitteiden tarkentuminen matalammilta abstraktion tasoilta korkeammille [5]. Jos tällainen käsitteellinen muutos ei pääse tapahtumaan, saattavat virheelliset tietorakenteet haitata uusien käsitteiden muodostumista. Muutos käsitteellisessä ymmärryksessä voidaan saada aikaan kognitiivisen konfliktin avulla, jossa oppilas ei pysty käyttämään olemassa olevaa matemaattista käsitettä uuden asian oppimiseen. Tällöin tulee tarve määritellä uusia tai tarkentaa

olemassa olevia käsitteitä tietorakenteiden aukkojen täyttämiseksi. Kognitiivisten konfliktien luomista käsitteellisen muutoksen aikaansaamiseksi on tutkinut muun muassa Liu simulaatiopohjaisten oppimisympäristöjen tapauksessa. Tutkimuksessaan hän jakaa kognitiiviseen konfliktiin perustuvan lähestymistavan neljään vaiheeseen: ulkoistamiseen, reflektioon, konstruktion ja soveltamiseen. Hänen opetuskokeilussaan simulaatiopohjaista oppimisympäristöä käytettiin erityisesti reflektion ja konstruktion vaiheisiin, joissa ensin oppilas vertaili omia ja ohjelman tarjoamia käsityksiä manipuloitavassa ympäristössä, minkä jälkeen tarkkojen vaiheiden ohjaamana oppilas konstruoi opeteltavan käsitteen. Liun mukaan teknologian hyödyt kognitiivisten konfliktien luomiseen perustuvat ennen kaikkea sen tutkimuksellisiin mahdollisuuksiin. [22]

Proseduraalinen taito

Kirjallisuudessa teknologisten apuvälineiden vaikutusta proseduraaliseen taitoon on tutkittu paljon erityisesti konseptuaalisen tiedon kehityksen yhteydessä. Monet tutkimukset raportoivat oppilaiden proseduraalisten taitojen parantuneen, kun konseptuaalista ymmärrystä on pyritty syventämään [26]. Tämä voi esimerkiksi johtua siitä, että käsitteiden ja relaatioiden oppiminen helpottaa ymmärtämään myös sen, miksi jokin algoritmi toimii ja missä tilanteissa sitä on mahdollista käyttää. Kuitenkin kirjallisuudessa esiintyy useita tutkimustuloksia, joiden mukaan teknologisten apuvälineiden käyttö ei merkittävästi paranna proseduraalista osaamista verrattuna perinteiseen opetukseen. Demir väittää tämän johtuvan siitä, proseduureja on yritetty opettaa perinteisen kirjaopetuksen tehtäviä käyttämällä, eikä tällöin opetuksessa ole hyödynnetty teknologian tuomia helpotuksia ja parannuksia. Tutkimuksessaan hän kirjoittaa virtuaalisista manipulatiiveista, jotka oikein käytettynä mahdollistavat myös proseduraalisten taitojen kehittämisen. Hän huomauttaa, että myös tehtävänannolla on suuri merkitys siihen, minkä matemaattisen taidon osa-aluetta tehtävän tekeminen kehittää. Demir kirjoittaa, että algoritmisen taito kehittyy parhaiten selkeästi jäsennellyissä tehtävänannoissa. [23]. Samaan johtopäätökseen tulevat Suh ja Moyer fyysisiä ja virtuaalisia manipulatiiveja vertailevassa tutkimuksessaan yhtälönratkaisun kontekstissa. Heidän tutkimuksensa mukaan virtuaalisia manipulatiiveja käyttäneet oppilaat pystyivät yhdistämään visuaalisia ja symbolisia representaatioita, mikä näkyi suoraan heidän kyvyssään ratkaista lineaarisia yhtälöitä [24].

Vaikka konstruktiivisissa teorioissa toistolla on tärkeä rooli algoritmisen sujuvuuden kehittymisessä, ei se ole silti ainoa mahdollinen keino oppia proseduraalisia taitoja. Tutkimukset osoittavat, että parhaat oppimistulokset eivät

tule ainoastaa pitkäjänteisen toiston kautta, vaan tiedon muodostus vaatii oikeanlaisen konstruktiosprosessin. Kuten muidenkin matemaattisen taidon osa-alueiden kohdalla, myös proseduraalisen taidon kehittymisen kannalta oppilaan itsenäinen tiedon konstruktio tehostaa oppimista. Tällöin proseduraalisen taidon algoritmisen puolen kehittyminen vaatii algoritmin konstruoinnista paloittain ja usein tarkkaakin vaiheittaista perustelua. [3, s. 117-119]

Suh ja Moyer-Packenham kirjoittavat artikkelissaan algoritmisen ajattelun kehittämisestä erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskujen tapauksessa. Heidän mukaansa algoritmin oppimisen sijaan sen konstruoinnin tulisi olla lähtöisin oppilaan omasta halusta selventää matemaattista prosessia, jolloin algoritmin vaiheet rakentuvat hänen oman päättelynsä avulla. Ymmärtämistä ja joustavuutta korostava proseduraalisen sujuvuuden kehittyminen on mahdollista hyvin suunnitelluissa ja tuetuissa oppimisympäristöissä. Algoritmiseen ajatteluun voidaan kannustaa sekä fyysisillä että virtuaalisilla manipulatiiveilla, mutta Suh ja Moyer-Packenham ehdottavat, että virtuaaliset versiot ovat tehokkaampia varsinkin, kun pyritään tutkimukselliseen oppimiseen. He huomasivat, että erityisesti haastavampien erinimisten murtolukujen laskutoimituksia hankaloitti fyysisten murtokakkujen osien rajallisuus, mikä rajoitti oppilaita myös tutkimasta kaikkia haluaminsa tilanteita. Lisäksi sähköisissä ympäristöissä esimerkiksi murtolukujen laventamisen merkitys ja vaikutus oli helposti havaittavissa sekä visuaalisissa että symbolisissa esityksissä. Vaikka virtuaalisissa ympäristöissä algoritmien opettelua on mahdollista tehostaa tarkalla vaiheittaisella konstruoinnilla, huomasivat Suh ja Moyer-Packenham, että joissain tapauksissa virtuaalisten manipulatiivien käyttö teki kyseiset ominaisuudet turhiksi. He raportoivat, että virtuaalisia manipulatiiveja käyttäneet oppilaat saattoivat tutkimusvaiheessa keksiä algoritmin spontaanisti. [25]

Proseduraalisen taitoon kuuluu olennaisena osana sujuvuus matemaattisissa proseduureissa. Tämä on mahdollista saavuttaa, kun osa matemaattisien proseduurien suorittamisesta automatisoituu, eikä vaadi oppilaalta enää jatkuvaa tietoista keskittymistä. Monet oppilaiden matemaattiseen taitoon liittyvät ongelmat ovatkin peräisin hitaasta tai virheellisestä tiedonpalautuksesta pitkäaikaismuistista työmuistiin. Arroyo ym. väittävät, että sujuvuus aritmeettisissa peruslaskutoimituksissa eli yhteen-, vähennys, kerto- ja jakolaskuissa vaikuttaa matemaattisen taidon kehittymiseen ja sen on tutkittu parantavan erityisesti heikosti suoriutuvien oppilaiden suoriutumista. He kirjoittavat artikkelissaan *MathSuccess*-nimisestä ohjelmistosta, jolla pyritään työmuistin kuormituksen vähentämiseen matemaattisen tiedon palauttamista kehittäville tehtäville. Ohjelmiston harjoitukset tähtäävät mahdollisim-

man virheettömän tiedonpalautuksen lisäksi myös nopeuteen, jonka kehittymisen Arrayo ym. kirjoittavat olevan tärkeää myös esimerkiksi ongelmanratkaisun sujuvuuden kannalta. MathSuccess-ohjelmiston tehtävät perustuvat visuaalisten ja auditiivisten ohjeiden ja arvioinnin yhdistelmään. Erityisesti nopeuden kehittäminen korostuu, kun oppilas kilpailee nopeudessa ohjelmistoa vastaan. Oppilas vastaa annettuun tehtävään ääneen mahdollisimman nopeasti, minkä jälkeen ohjelmisto sanoo ääneen oikean vastauksen. [14]

Erilaisten virtuaalisten oppimisympäristöjen lisäksi proseduraalisen taidon kehittymistä on mahdollista parantaa myös tavanomaisempienkin teknologisten apuvälineiden avulla. Nykypäivänä erilaiset graafiset ja symboliset laskimet tarjoavat tehokkaita apuvälineitä rutiininomaisten proseduurien ja algoritmien suorittamiseen. Matematiikan aihealueista erityisesti algebran opetus on hyötynyt nykyajan laskimista, koska niiden CAS-ominaisuudet (engl. Computer Algebra System) mahdollistavat pitkienkin laskutoimituksien suorittamisen napin painalluksella. Tästä johtuen monien tehtävien painotus onkin voitu siirtää kokonaan pois laskuvaiheiden ulkoa opettelusta ja keskittyä sen sijaan niiden taustalla olevien matemaattisten ilmiöiden opiskeluun. [26]

Kuten luvun alussakin todettiin, on algoritmien sujuvuus silti tärkeä osa matemaattista taitoa. Yleisenä huolen aiheena onkin, että laskimen käyttö monimutkaisten mekaanisten laskuvaiheiden suorittamiseen voi estää proseduraalisen taidon kehittymistä, kun algortimeja ei suoriteta enää itse. Keskustelua on herättänyt myös se, onko symbolisen laskimen erilaisten toimintojen käyttö matemaattista taitoa. Herman ja Milou esittävät, että symboliseen laskentaan kykenevien laskinten käyttö saattaa jopa parantaa proseduraalisia taitoja. He raportoivat tutkimuksessaan, että laskinten CAS-toimintoja käyttäneet oppilaat näyttivät kiinnostusta siihen, miten laskin päätyi johonkin tulokseen. Lisäksi oppilaat usein kyseenalaistivat laskimen antaman tuloksen ja päätyivät vertailemaan käsin laskettua vastausta laskimen tuottamaan arvoon. [26]. Hermanin ja Miloun saamat tulokset ovatkin linjassa myös Suhin ja Moyer-Packenhamin tekemien havaintojen kanssa siitä, miten oppilaan oman kiinnostuksen herääminen ja tutkimuksellinen ote voi hyödyttää myös proseduurien ja algoritmien oppimisessa.

Luovuus ja ongelmanratkaisukyky

Menestyminen opinnoissa ja lopulta työelämässä vaatii nykypäivänä henkilöltä enemmän kuin koskaan ennen. Opintojen aikana hankittu tietämys ei enää kanna läpi koko elämän, vaan aikaisempaa tietoa tulee osata käyttää eteentulevien tilanteiden vaatimalla tavalla. Tiedon soveltamisen taito, on-

gelmanratkaisukyky ja luovuus esiintyvätkin yhä useammin yhtenä tärkeimmistä matemaattisen taidon osa-alueista. [1]

Ongelmanratkaisukyvyn keskiössä on henkilön itse luomat tiedon struktuurit, joihin käsiksi pääseminen vaikuttaa merkittävästi ongelmanratkaisun onnistumiseen. Sen vuoksi myös muistilla ja metakognitiivisilla kyvyillä on ongelmanratkaisun kannalta keskeinen merkitys. Ongelmatilanteet ovat kullekin oppilaalle yksilöllisiä ja riippuvaisia ympäristöstä. Tehtävä, joka on ongelmallinen yhdelle, saattaa olla rutiinitehtävä toiselle. Tällöin myöskään ongelmanratkaisukyvyn kehittämiseen ei ole olemassa vain yhtä kaikille sopivaa tapaa eikä matematiikan opetuksessa voida erottaa yksittäisiä tekoja, jotka kehittäisivät ongelmanratkaisukykyä kokonaisuutena. [3, s. 16-17 ja s. 124-126]. Osittain tämän vuoksi ongelmanratkaisukyky on yksi hankalimmin kehitettävissä olevista taidoista ja sekä oppilaat että opettajat kohtaavat siihen liittyviä vaikeuksia. Panaouran mukaan ongelmanratkaisussa epäonnistuminen ei johdu matemaattisen osaamisen puutteesta, vaan oppilaan kyvyttömyydestä käyttää tietoa hyväkseen. Omien vahvuuksien ja rajoitusten ymmärtäminen ja niiden mukaan toimiminen vaatii itsesäätelyn kyvyn kehittämistä. [27]. Itsesäätelyn ja metakognition vaikutus ongelmanratkaisuprosessissa esiintyykin useissa ongelmanratkaisun kehittymiseen tähtäävissä tutkimuksissa [27], [28].

Vaikka ei ole olemassa kaikille ongelmatyypeille pätevää ratkaisuproseduuria, voidaan ongelmanratkaisuprosessi jakaa joihinkin yleistettäviin vaiheisiin. Ongelmanratkaisun ensimmäisessä vaiheessa oppilas valitsee, mikä annetusta tiedosta on ongelmanratkaisutehtävälle välttämätöntä ja mikä tarpeetonta informaatiota. Tämän perusteella ongelmasta muodostetaan tilannemalli. Seuraavassa vaiheessa tilannemalli muutetaan matemaattiseen muotoon, eli keskeiset suureet ja relaatiot ilmaistaan yhtälöiden avulla. Tähän matemaattisen mallintamisen vaiheeseen oppilas käyttää olemassa olevaa osaa mistään esimerkiksi matemaattisista käsitteistä ja niihen liittyvistä algoritmeista. Lopuksi saadut tulokset muutetaan vastaamaan annettuun ongelmaan. [27]. Ongelmanratkaisun onnistumisen kannalta kriittisimmän vaiheen voidaan ajatella olevan yllä kuvattu tilannemallin luomisen vaihe, sillä silloin oppilas analysoi annettua informaatiota ja pyrkii löytämään omasta tietorakenteestaan yhtymäkohtia ratkaisustartegian kehittämiseksi.

Ongelman hahmottamisessa ja tilannemallin luomisessa visuaalisen representaation muodostaminen voi helpottaa oleellisen informaation löytämistä tehtävänannosta. Visualisaatiot ovat tehokas resurssi matematiikan oppimisessa ja mahdollistavat uudenlaisia tapoja ajatella ja selvittää ongelmaa.

Visualisaatioiden muodostamiseen ja muovaamiseen voidaan käyttää apuvälineinä esimerkiksi geometriaohjelmistoja, joiden dynaaminen muokattavuus helpottaa ongelmaan liittyvien näkökulmien hahmottamista sekä niiden tutkimista. Teknologiset apuvälineet visualisaation tukemisessa tarjoavat mahdollisuuksia erityisesti oppilaille, joilla on ongelmia spatiaalisen hahmotuksen kanssa. Vaikka visualisaation hyödyt tunnetaan, on osa tutkimuksista päätynyt myös vastakkaisiin tuloksiin. Tietokoneohjelman dynaamisia ja paperilla esitettyjä visualisaatioita vertaillut Lavy huomasi tutkimuksessaan, ettei manipuloitava representaatio tuonut odotettua helpotusta ongelmanratkaisuun. Hän pohtii tutkimuksessaan tämän voivan johtua dynaamisen visualisaation tuomasta informaatiotulvasta, joka saattaa jopa haitata ongelmanratkaisuprosessia. Lavy esittää, että ylimääräinen informaatio voi antaa ongelmasta kompleksisemmän mielikuvan kuin se todellisuudessa on. [28]

Liian moninaiset dynaamiset visualisaatiot saattavat hankaloittaa olennaisen tiedon löytämistä tehtävänannosta, mutta informaation havaitsemisessa ja sen käyttämisessä voi esiintyä ongelmia muutenkin. Kuitenkin myös ongelmanratkaisuprosessia voidaan tukea erilaisten kognitiivisten tukien avulla, jotka helpottavat ongelmatilanteen hahmottamista ratkaisustrategian löytämiseksi. González-Calero, Arnau, Puig ja Arevalillo-Herráez kirjoittavat tuutorointijärjestelmistä, joiden ominaisuuksia voidaan käyttää tukemaan ongelmanratkaisuprosessia esimerkiksi rajoittamalla mahdollisia toimintoja ja tarjoamalla vihjeitä ratkaisussa etenemisestä. Tutkimuksessaan he korostavat erityisesti vihjeiden merkitystä ongelmanratkaisukyvyyn kehittymisessä. Heidän käyttämänsä tuutorointijärjestelmä *Hypergraph Based Problem Solver* tarjoaa kolmen tasoisia vihjeitä, jotka vaihtelevat yksinkertaisista vinkeistä yksityiskohtaisiin ratkaisuohjeisiin. González-Calero ym. huomasivat tutkimuksessaan, että virtuaalisien ympäristöjen antama intensiivinen tuki näkyi parantuneina tuloksina ongelmanratkaisutehtävissä ja uudenlaisten ratkaisustrategioiden käytössä, kun verrattiin sähköisiin ympäristöihin, joissa intensiivistä tukea ei ollut mahdollista käyttää. [29]

Päättely ja perusteleminen

Historiallisesti katsoen todistaminen on ollut matemaatikkojen työkalu matemaattisten lauseiden todentamiselle ja väitteitä tukevien syiden selittämiseksi [30]. Deduktiivisen taidon perustavanlaatuisesta roolista huolimatta todistaminen on jäänyt taka-alalle kouluopetuksessa [5], [7]. Taidon vähäisen huomioimisen lisäksi oppilaat kohtaavat monia ongelmia sen saavuttamisessa. Kirjallisuudessa on käyty paljon keskustelua siitä, mitkä ovat parhaat keinot kehittää deduktiivisia kykyjä. Todistamisen ja päättelyn taitoa kehit-

tävien tehtävien muodostamista on pyrkinyt määrittelemään Oner artikkelissaan. Hän luonnehtii todistustehtävien päämääriä kahden erilaisen tietotyypin, *apriorisen* ja *aposteriorisen tiedon*, avulla. Apriorinen eli analyyttinen ja deduktiivisesti pääteltävä tieto ei vaadi aistihavaintoa, kun taas aposteriorinen tieto syntyy kokemuksen kautta. Oner esittää, että ideaali todistustehtävä yhdistelee näitä kahta tapaa tietää ensiksi matemaattista yleistämistä harjoittavilla kokeellisilla vaiheilla ja lopulta väitteitä tukevilla osioilla, joiden varaan deduktiivinen päättely voidaan rakentaa. Hän huomauttaa, että tällainen kaksivaiheinen todistamisharjoitus mukailee myös matemaatikoiden tapaa muodostaa todistuksia. [7]

Tutkimusta on tehty muun muassa virtuaalisten oppimisympäristöjen [31], dynaamisten geometriaohjelmistojen [7], [32] ja taulukkolaskentaohjelmien [33] käytöstä deduktiivisten taitojen kehittämisessä. Suuri osa kirjallisuudessa esiintyvistä tutkimuksista painottaa Onerin mainitsemaa aposteriorista tietoa ja todistustehtävien kokeellista osuutta [33], [7], [30], [32], mutta tutkimusta on tehty myös todistamisen deduktiivisten osioiden vaiheittaisesta konstruomisesta [31]. Oppikirjoihin verrattuna teknologiset apuvälineet tarjoavat parempia keinoja erityisesti empiirisen tutkimuksen tekemiseen. Tutkimuksellisuuden kannalta dynaamiset geometriaohjelmistot, kuten *Geometer's Sketchpad* ja *Cabri Geometry*, tarjoavat kaksi tärkeää etua: mahdollisuuden dynaamiseen manipulaatioon ja visuaalisen kontrollin. Kuitenkin sähköisten apuvälineidenkin ominaisuuksissa on eroja. Oner huomauttaa, että esimerkiksi *LOGO*-oppimisympäristön käyttäminen vaatii symbolista kontrollia, eikä siten ole yhtä helposti manipuloitavissa. [7]

Dynaamisten geometriaohjelmistojen etuna näyttäisi olevan niiden soveltuminen ilmiöiden laajaan tutkimiseen. Geometristen objektien dynaaminen manipuloitavuus mahdollistaa monipuolisempien havaintojen tekemisen. Teknologisia apuvälineitä käyttämällä voidaan tehdä havaintoja, joiden huomaa minen olisi vaikeaa ilman teknologiaa. Kuitenkaan pelkkä tutkimuksellisuus ja ilmiön havainnointi ei riitä, vaan oppilaita tulee ohjata tekemään päätelmiä ja yleistyksiä tutkimuksensa tuloksista. [33]. Erityisesti dynaamisten geometriaohjelmistojen käytössä on tärkeää rohkaista oppilasta tekemään hypoteeseja geometristen objektien välisistä suhteista ja hankkia välineitä selittää toimintaansa ja tuloksiaan. Sen lisäksi, että dynaamisen manipulaation avulla voidaan tehdä havaintoja ja hypoteeseja ilmiöstä, mahdollistaa se myös havaintojen perusteella tehtyjen hypoteesien testaamisen useissa erilaisissa olosuhteissa. [7]

Erilaisten geometriaohjelmistojen lisäksi myös perinteiset ohjelmistot, kuten

taulukkolaskentaohjelmat, tarjoavat monipuolisen alustan toistuvien ominaisuuksien havaitsemiselle ja kokeilemiselle. Taulukkolaskennan käyttöä hypoteesien tekemiseen ja todistamiseen analysoivat pidemmälle Abramovich ja Sugden algebran aihealueessa. Kun taulukkolaskentaohjelmia käytetään mallintamistyökaluna, huonosti ymmärretyt käsitteet ja epäintuitiiviset ideat voivat syntyä prosessin aikana itsestään. Heidän mukaansa numeerisien havaintojen rohkaisemana oppilas etsii matemaattisia perusteita havaitseman sa ilmiön taustalle ja tarve luoda formaaleja todistuksia tulee luonnostaan. Lisäksi erilaiset hypoteesit vaativat erilaisia todistamistekniikoita, joita oppilaat oppivat käyttämään testatessaan numeeristen havaintojensa pohjalta tehtyjä hypoteeseja. [33]

Tutkimuksellisen näkökulman korostaminen todistustehtävissä ei ole saanut aikaan pelkkää innostusta tutkijoiden keskuudessa. Oppilailla saattaa olla ennakkokäsitys, että matemaattisen olettamuksen paikkaansapitävyys varmistetaan empiirisellä tutkimuksella, jolloin deduktiivisen todistuksen tekeminen vaikuttaa mielenkiinnottomalta [30]. Esiin on nostettu huoli siitä, että tutkimuksellisuus ja hypoteesien tekeminen havainnoista saattaa vahvistaa näitä uskomuksia ja saada aikaan väärinymmärryksiä matemaattisen totuuden luonteesta [7]. Leen ja Chenin mukaan olisikin tärkeää, että opetuksessa luodaan tilanteita, joissa formaalin todistuksen muodostaminen on välttämätöntä. Heidän mukaansa tämä koskee erityisesti kokemattomia todistajia. [30]. Abramovich ja Sugden ehdottavat, että deduktiivisen todistuksen tarvetta voidaan korostaa antamalla oppilaille esimerkkejä havaintojen pohjalta tehdyistä virheellisistä yleistyksistä [33]. Lisäksi oppilaiden suhtautumista todistuksen muodostamiseen tarpeellisuuteen voidaan pyrkiä muuttamaan luomalla tilanteita, joissa empiirinen tutkimus johtaa yllättäviin ja ristiriitaisiin tilanteisiin. Tutkimuksessaan kognitiivisten konfliktien vaikutuksesta todistusten konstruamiseen Lee ja Chen huomasivat, että ristiriitatilanteiden kohtaaminen sai oppilaat muodostamaan todistuksia luonnollisesti [30].

Vaikka monien tutkimusten perusteella voidaan sanoa, että teknologialla on suuri merkitys niin todistamisen tarpeen löytämisessä kuin päättelyprosessin tukemisessakin, löytyy kirjallisuudesta myös päinvastaiseen lopputulokseen päätyviä tutkimuksia. Muun muassa Roy, Inglis ja Alcock tekivät tärkeitä huomioita audio-visuaalisesti tuetun todistuksen oppimisesta. Opetuskokeilussa todistus rakennettiin vaiheittain ja prosessia tuettiin korostamalla todistuksen oleellisia seikkoja visuaalisesti esimerkiksi nuolilla. Tutkimuksessa havaittiin, että loogisten suhteiden ymmärtämiseksi luodut teknologiset ominaisuudet kuitenkin häiritsivät enemmän oppilaiden päättelyprosessia ja he suoriutuivat huonommin kuin perinteisin keinoin oppineet oppilaat. Yllättä-

vän oppimistuloksen ehdotettiin johtuvan itsenäisen päättelyn puuttumisesta, kun käytetyt apuvälineet poistivat sen tarpeen. Lisäksi tarkasti vaiheistettu prosessi ja tietyssä järjestyksessä esitetyt huomionarvoiset seikat rajasivat tiedon käsittelyn polun kapeaksi. Tutkimuksessa käytetty teknologinen interventio ei antanut oppilaalle mahdollisuutta konstruoida informaattia aiempiin kokemuksiinsa peilaten, eikä huomionnut oppilaiden erilaisia tapoja prosessoida tietoa. [31]. Näin ollen Royn ym. tutkimustulokset tukevat tehdyn tutkimuksen havaintoja todistamisaktiiviteettien empiirisen tutkimuksen ja omien havainnointien tärkeydestä.

Motivaatio ja oppimisen mielekkyys

Oppilaan oma kokemuksella ja tuntemuksilla oppimisesta on merkittävä vaikutus oppimiseen. Esimerkiksi itseluottamukseen, tylsyyteen ja hämmennykseen liittyvät tuntemukset näkyvät suoraan koulumenestyksessä ja ennustavat suoriutumista [14], [34]. Motivaatio onkin suuri osa matematiikan oppimista ja joidenkin tutkijoiden mukaan sen puute on yksi merkittävimmistä ongelmista matematiikan opetuksessa [14]. Rasila ym. päättelevät tämän johtuvan osittain siitä, että matematiikka esitetään usein oppikirjamaisesti sääntöjen kokoelmana, jolloin luonnollinen oppiminen yrityksen ja erehdyksen kautta estyy. Toisistaan irrallisten aiheiden ulkoa opetteleminen ei välttämättä tunnu mielekkäältä ja motivaatio kärsii. [5]. Erityisesti yläkouluikäisillä oppilailla on taipumus negatiiviseen asenteeseen matematiikkaa kohtaan [34]. Negatiivinen kokemus oppimisesta voi vähentää sitoutumista oppimiseen ja saada aikaan epätoivottua käytöstä opetustilanteessa [14].

Oppilaan osallistamista ja mielenkiintoa uuden tutkimiseen ja kokeilemiseen on pyritty lisäämään opetusteknologian keinoin. Kirjallisuudessa monissa tutkimuksissa on saatu viitteitä siitä, että teknologian käyttö parantaa asennetta sekä oppimista että matematiikan oppiainetta kohtaan [16], [34], [15]. Positiivista vaikutusta on perusteltu muun muassa sillä, että teknologiset apuvälineet vähentävät fyysisten opetusvälineiden kömpelyydestä johtuvaa turhautumista [16] ja tukevat oppilaan itsenäisyyttä sekä omistajuutta omasta oppimisesta, mikä näkyy vahvistuneena itseluottamuksena ja mielenkiintona oppiainetta kohtaan [15].

Balentyne ja Varga ovat tehneet tutkimusta sähköistä ja lähiopetusta yhdistelevän monimuoto-opetuksen vaikutuksista oppimistuloksiin ja asenteeseen matematiikkaa kohtaan. Heidän mukaansa oppimisen positiivisia kokemuksia lisäävä vaikutus perustuu monimuoto-opetuksen molempien opetusmuotojen parhampien puolien hyväksikäyttöön ja erityisesti sähköisen opetuksen kom-

ponentin mahdollistamaan *omatahtiseen oppimiseen* (engl. *self-paced learning*). Omatahtisessa oppimisessa oppilaat suorittavat tehtäviä ja etenevät uusiin aiheisiin omien valmiuksiensa mukaan. [34]. Myös Arroyo ym. korostavat yksilöllisesti räätälöityjen oppimispolkujen motivoivaa vaikutusta adaptiivista tuutorointijärjestelmää käsittelevässä tutkimuksessaan. Tutkimuksessa käytetty tuutorointijärjestelmä tekee päätelmiä oppilaan tekemistä valinnoista ja havaituista käytösmalleista. Järjestelmä pystyy havaitsemaan oppilaiden negatiivisia asenteita esimerkiksi tehtävään käytetyn ajan perusteella. Tällaisiin asenteisiin järjestelmä vastaa muun muassa antamalla oppilaalle tehtäväksi helpomman taseisia tehtäviä. [14]

Eräs opetusteknologian konkreettinen hyöty on automaattisen arvioinnin ohjelmat, jotka lisäävät tutkitusti motivaatiota ja mielekkyyden tunnetta [5]. Steen ym. vertaavat kirjoituksessaan automaattista arviointia videopeleihin. Peleissä pelaaja tekee päätöksiä ja näkee heti valintansa vaikutuksen. Heidän mukaansa samanlainen välitön palaute toimii myös opetusteknologian tapauksessa. [16]. Rasila ym. kirjoittavat artikkelissaan automaattiseen arviointiin kykenevästä *STACK*-ohjelmistosta. Ohjelma antaa palautetta tehtävän suorituksesta ja virheellisten ratkaisujen tapauksessa antaa yksityiskohtaisen ja visuaalisen selityksen siitä, miksi annettu ratkaisu on väärin. Lisäksi ohjelma kategorisoi automaattisesti virhelähteitä, mikä helpottaa systemaattisten virheiden löytämistä [5].

Mielekkyyden tunteiden lisäksi oppilaan kokemukset omasta älykkyydestään ja mahdollisuudesta sen lisäämiseen ohjaavat oppimista. Arroyo ym. jakavat Dweckin teorian mukaisesti oppilaat tavoiteorientaatioidensa perusteella kahteen kategoriaan: oppimis- ja suoritustavoitteisiin orientaatioihin. *Oppimistavoitteiselle* (engl. *state-based*) oppilaalle on ominaista ajatella, että älykkyyttä on mahdollista kehittää sinnikkäällä opiskelulla, kun taas *suoritustavoitteinen* (engl. *trait-based*) oppilas ajattelee oman älykkyytensä olevan muuttumatonta. Näiden kahden erilaisen orientaation ero näkyy erityisesti tehtävien valinnassa. Oppimisorientoituneet oppilaat ovat motivoituneempia etsimään haasteita oppimisessa toisin kuin suorituserientoituneet oppilaat, joilla on tapana valita helpompia ja varmempia tehtäviä. [14]. Tutkimuksissa on huomattu, että opetusteknologiaa käyttämällä oppilaat haastavat itseään ratkaisemaan vaikeampia tehtäviä [16]. Arroyo ym. mukaan sillä saattaa olla tekemistä virtuaalisten oppimisympäristöjen antaman palautteen kanssa. Oikein kohdistetut keuhut voivat parantaa oppilaan itsetuntoa ja sen seurauksena myös oppimiseen sitoutumista. Oppilaat, joita keuhutaan heidän vaivannäöstään ja ponnistelustaan näyttävät enemmän oppimistavoitteiselle oppilaalle ominaisia ajatuksia älykkyydestään, kun taas älykkyydestään kehuja

saavilla on enemmän taipumusta suoritustavoitteisuuteen. Adaptiivisten tuutorointijärjestelmien tapauksessa tähän on pyritty kiinnittämään huomioita animoitujen virtuaalisten oppimiskumppaneiden avulla, jotka kehuvat oppilasta tehtävän kanssa ponnistelusta silloin, kun sille on aihetta. Oikeanlaisen kehumisen lisäksi Arrayo ym. huomauttavat, että emotiot tarttuvat helposti ja näin ollen virtuaalisten hahmojen on mahdollista välittää esimerkiksi innostuneisuuden tunteita oppilaille. [14]

Väärin käytettynä teknologia voi myös hankaloittaa ja häiritä oppimista. Oppilaan motivaatio voi kärsiä, jos opetusteknologian käyttö koetaan vaikeaksi tai turhauttavaksi. Rasila ym. kirjoittavat, että ongelmat opetusteknologian kanssa toimisessa johtuvat useimmiten siitä, että painettua opetusmateriaalia ja siihen liittyviä opetustapoja on yritetty muuttaa sellaisenaan sähköiseen muotoon. Musti-Rao, Lynch ja Plati kutsuvat ilmiötä *analogiseksi jännitteeksi* (engl. analog tensions). Heidän mukaansa turhautuminen ohjelmistoihin tai laitteisiin johtuu siitä, etteivät ne vastaa ei-digitaalisten oppimisvälineiden ja -ympäristöjen toiminnan pohjalta tehtyjä odotuksia [12]. Rasila ym. huomauttavat, että teknologian kanssa toimiminen pitäisi tehdä mahdollisimman helpoksi ja ohjeistusten tulisi olla ymmärrettävissä myös ilman opettajan avustusta [5]. Onkin tärkeä huomata, ettei oppilailla välttämättä ole taitoja toimia virtuaalisissa oppimisympäristöissä samalla tavalla kuin fyysisissä ympäristöissä. Kuitenkin sujuva toimiminen oppimisteknologian kanssa on taito siinä missä muutkin ja se on näin ollen kehitettävissä muiden taitojen tavoin.

5 Johtopäätökset

Teknologian tuominen osaksi opetusta on haastava tehtävä, joka vaatii uudenlaista osaamista sekä opettajalta että oppilaalta. Tässä tutkielmassa analysoidun kirjallisuuden pohjalta voidaan todeta, että teknologian käyttö osana opetusta tuo selkeitä hyötyjä oppimiseen verrattuna perinteisiin menetelmiin. Kuitenkaan läpi tutkielman huomataan, ettei teknologisten apuvälineiden käyttö yksinään ei riitä, vaan interventioden taustalla tulee olla selkeä pedagoginen tarkoitus.

Tutkielmassa esitettyjen lähteiden perusteella voidaan sanoa, että matemaattisen taidon osa-alueista ja yleisemmin oppimiseen liittyvistä näkökulmista on mahdollista löytää kullekin ominaisia erityispiirteitä. Nämä piirteet antavat selkeän kohteen opetuksen keskittymiselle. Konseptuaalisen taidon tapauksessa esiin nousee sujuvuus käsitteen erilaisten representaatioiden välillä siirtymisessä ja käsitteiden välisten relaatioiden ja niiden hierarkisen rakenteen visualisointi. Myös ongelmanratkaisutaidon kannalta hyödyllistä on sujuvuus erilaisten representaatioiden välillä, mutta sen lisäksi ongelmatilanteen visualisointi ja matemaattinen mallintaminen on keskeistä ongelmanratkaisun onnistumisen kannalta. Proseduraalisten taitojen kehittämisessä korostuu sujuvuus peruslaskutoimituksissa, joiden hallitseminen luo pohjaa myös monimutkaisemmille laskutoimituksille. Tutkimukselliset menetelmät näyttivät edistävän erityisesti deduktiivisen taidon kehittymistä luomalla tarpeen formaalien todistuksien muodostamiselle. Motivaation näkökulmasta hyödyllistä on kiinnittää huomiota oppimisen omistajuuteen ja itsenäisyyteen liittyviin aspekteihin. Lisäksi motivaation lisäämiseksi on tärkeä huomioida sen taustalla olevia emotionaalisia tekijöitä, kuten itseluottamusta ja -tuntemusta. Edellä eriteltyt näkökulmat voidaan nähdä erilaisina lähtökohtina myös opetukseen ja matemaattisten suhteiden oppimiseen.

Kun selkeät keinot matemaattisen taidon osa-alueiden kehittämiseen ovat tiedossa, on teknologisten apuvälineiden ainutlaatuiset ominaisuudet mahdollista valjastaa mahdollisimman tehokkaasti tukemaan matemaattisen taidon kehittämistä. Tutkielmassa käytetty kirjallisuus näyttäisi pääosin tukevan Puenteduran ajatusta siitä, että teknologian käyttö toimii parhaiten, kun sillä tehdään aiemmin jopa mahdottomia asioita. Monet tutkimukset tehtiin esimerkiksi adaptiivisten tuutorointijärjestelmien ja dynaamisten geometriaohjelmistojen ympäristöissä, mitkä ovat Puenteduran kuvaamia korkeamman tason teknologisia interventioita. Ympäristöt tarjoavat helpotuksia verrattuna perinteisiin menetelmiin, mutta antavat myös täysin uudenlaisia lähestymistapoja sekä oppimistilanteeseen että prosessiin. Vaikka voidaan päätellä,

että teknologian käyttö edistää matemattisten taidon osa-alueiden oppimista, erityisesti motivaation ja sitoutumisen parantumista tulee tarkastella kriittisesti mahdollisen uutuusefektin vuoksi. Käytetyn kirjallisuuden perusteella ei voida tehdä johtopäätöksiä siitä, liittyykö teknologian käytön oppimista parantavat vaikutukset osittain uutuuden viehätykseen vai saataisiinko vastaavia tuloksia myös pidemmällä aikajaksolla. Näin ollen teknologian käytön tehokkuuden voidaankin katsoa perustuvan myös sen mahdollistaviin oppilaskeskeisiin ja vaihteleviin opetustapoihin.

Vaikka matemaattisen taidon eri osa-alueista pystyttiin löytämään tarkkoja näkökulmia, joiden kehittämiseen teknologiaa käytetään, löytyi monista osioista myös yhteisiä piirteitä. Erityisesti oppimisprosessin tukemiseen liittyvät aspektit, kuten kognitiiviset ja metakognitiiviset tuet, korostuivat läpi tutkielman. Tähän näkökulmaan opetusteknologian käyttö on erityisen tarkoituksenmukaista ja hyödyllistä, sillä perinteisissä oppimisympäristöistä poiketen tietokoneohjelmistojen avulla voidaan tarjota jokaiselle oppilaalle yksilöllistä ja helposti saatavilla olevaa tukea.

Teknologiset apuvälineet tuovat uusien oppimismahdollisuuksien lisäksi myös uudenlaisia ongelmia ja vaatimuksia, joiden huomioiminen on yhtä tärkeää kuin teknologian tarkkaan harkittu käyttö. Läpi tutkielman käy ilmi, että mitä enemmän teknologian käyttö muovaa opetusta, sitä enemmän oppilaalta vaaditaan kykyä pystyä säätämään omia tunteita ja toimintaa. Vaikka teknologisissa ympäristöissä on mahdollista kehittää myös itsesäätelyn taitoja, nuoremmilla oppilailla tällaiset taidot ovat vielä hyvin varhaisessa vaiheessa. Tutkielmassa käytetyt lähteet eivät ota kantaa siihen, pitäisikö teknologian lisäys opetukseen tehdä esimerkiksi SAMR-mallin mukaisesti asteittain. Lisäksi monimutkaisissa virtuaalisissa ympäristöissä toimimisen vaatimuksena on myös tietotekniset taidot, joita ei voida olettaa oppilaalla olevan automaattisesti. Erilaisten toimintojen sujuva käyttäminen on tärkeää varsinkin silloin, jos opetuksessa käytetään monia erilaisia ohjelmistoja.

Jotta teknologisia apuvälineitä voidaan käyttää mahdollisimman tehokkaasti hyödyntäen kaikki niiden tuomat mahdollisuudet, on opettajan laaja teknologis-pedagogisen sisältötiedon hallitseminen välttämätöntä. Tutkielmassa esitetyt matemaattisen taidon näkökulmat ja niiden kehittämistavat teknologian avustuksella tarjoavat katsauksen siitä, miten laaja huomioon otettavien aspektien joukko on teknologista interventiota suunniteltaessa. Haasteista huolimatta, harkitusti käytettynä teknologiset apuvälineet antavat aivan uudenlaisia mahdollisuuksia kasvattaa oppilaista nyky-yhteiskunnan vaatimukset täyttäviä, kriittiseen ajatteluun kykeneviä jäseniä.

Lähdeluettelo

- [1] Lakoma, E. (2002). *On mathematics teaching for future engineers - in the digital era*. European journal of engineering education, 27:3, 279-288.
- [2] Kilpatrick, J., Swafford, J.& Findell, B. (2001) *Adding it up: helping children learn mathematics*. National Academies Press.
- [3] Haapasalo, L. (1994). *Oppiminen, tieto, ongelmanratkaisu*. Vaajakoski, Jyväskylä: Medusa.
- [4] Järvelä, S., Häkkinen, P., Lehtinen, E. (toim.) (2006). *Oppimisen teoria ja teknologia opetuskäytössä*. Porvoo; Helsinki: WSOY Oppimismateriaalit Oy.
- [5] Rasila, A., Malinen, J.& Tiitu, H. (2015). *On automatic assessment and conceptual understanding*. Teaching Mathematics and Its Applications 34:13, 149-159.
- [6] Opetushallitus (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*.
- [7] Oner, D. (2008). *A Comparative Analysis of High School Geometry Curricula: What Do Technology-Intensive, Standards-Based, and Traditional Curricula Have to Offer in Terms of Mathematical Proof and Reasoning?*. The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 27:4, 467-497.
- [8] Mcleod, J., Vasinda, S. & Dondlinger, M. J. (2012). *Conceptual Visibility and Virtual Dynamics in Technology-scaffolded Learning Environments for Conceptual Knowledge of Mathematics*. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 31:3, 283-310.
- [9] Zulnaidi, H. & Zamri, S. (2017). *The Effectiveness of the GeoGebra Software: The Intermediary Role of Procedural Knowledge On Students' Conceptual Knowledge and Their Achievements in Mathematics*. EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13:6, 2155-2180.
- [10] Simon, M. A. (2017). *Explicating mathematical concept and mathematical conception as theoretical constructs for mathematics education research*. Educational Studies in Mathematics, 94:3, 117-137.

- [11] Tzur, R. & Simon M. (2004). *Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning*. International Journal of Science and Mathematics Education, 2:2, 287–304.
- [12] Musti-Rao, S., Lynch, T. L. & Plati, E. (2015). *Training for Fluency and Generalization of Math Facts Using Technology*. Intervention in School and Clinic, 51:2, 112–117.
- [13] Puentedura, R. (2015). *SAMR and TPACK: A Hands-On Approach to Classroom Practice*. Viitattu 1.3.2019. http://www.hippasus.com/rrpweblog/archives/2014/12/11/SAMRandTPCK_HandsOnApproachClassroomPractice.pdf.
- [14] Arroyo, I., Woolf, B. P., Burelson, W., Muldner, K., Rai, D. & Tai, M. (2014). *A Multimedia Adaptive Tutoring System for Mathematics that Addresses Cognition, Metacognition and Affect*. International Artificial Intelligence in Education Society, 24:4, 387–426.
- [15] Bray, A. & Tangney, B. (2017). *Technology usage in mathematics education research – A systematic review of recent trends*. Computers and Education, 114, 255–273.
- [16] Steen, K., Brooks, D. & Lyon, T. (2016). *The Impact of Virtual Manipulatives on First Grade Geometry Instruction and Learning*. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 25:4, 373–391.
- [17] Iiskala, T., Vauras, M. & Lehtinen, E. (2004). *Socially-shared metacognition in peer learning?*. Hellenic Journal of Psychology, 1:2, 147–178.
- [18] Daraei, S. (2015). *A Study about Effects of Facebook on Conceptual Learning Mathematics*. International Journal of Future Computer and Communication, 4:1, 77–81.
- [19] Chen, C.-H. & Chiu, C.-H. (2016). *Collaboration Scripts for Enhancing Metacognitive Self-regulation and Mathematics Literacy*. International Journal of Science and Mathematics Education, 14:2, 263–280.
- [20] Royer, R. & Royer, J. (2004). *Comparing Hand Drawn and Computer Generated Concept Mapping*. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 23:1, 67–81.
- [21] Alagic, M. (2003). *Technology in the Mathematics Classroom: Conceptual Orientation*. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 22:4, 381–399.

- [22] Liu, T.-C. (2010). *Developing Simulation-based Computer Assisted Learning to Correct Students' Statistical Misconceptions based on Cognitive Conflict Theory, using "Correlation" as an Example*. Journal of Educational Technology & Society, 13:2, 180-192.
- [23] Demir, M. (2018). *Effects of Virtual Manipulatives with Different Approaches on Students' Knowledge of Slope*. Journal of Interactive Learning Research, 29:1, 25-50.
- [24] Suh, J. & Moyer, P. S. (2007). *Developing Students' Representational Fluency Using Virtual and Physical Algebra Balances*. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 26:2, 155-173.
- [25] Suh, J. M., & Moyer-Packenham, P. S. (2016). *How Affordances and Constraints of Physical and Virtual Manipulatives Support the Development of Procedural Fluency and Algorithmic Thinking in Mathematics*. International Journal for Research in Mathematics Education, 6:2, 245-265.
- [26] Herman, M. & Milou, E. (2003). *CAS Calculators in Calculus: TI-89 versus TI-83*. The International journal of computer algebra in mathematics education, 10:4, 219-234.
- [27] Panaoura, A. (2012). *Improving problem solving ability in mathematics by using a mathematical model: A computerized approach*. Computers in Human Behavior, 28:6, 2291-2297.
- [28] Lavy, I. (2007). *A case study of dynamic visualization and problem solving*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38:8, 1075-1092.
- [29] González-Calero, J. A., Arnau, D. , Puig, L. & Arevalillo-Herráez, M. (2015). *Intensive scaffolding in an intelligent tutoring system for the learning of algebraic word problem solving*. British Journal of Educational Technology, 46:6, 1189-1200.
- [30] Lee, C.-Y., Chen, M.-P. (2008). *Bridging the gap between mathematical conjecture and proof through computer-supported cognitive conflicts*. Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 27:1, 1-10.
- [31] Somali, R., Matthew, I. & Alcock, L. (2017). *Multimedia resources designed to support learning from written proofs: an eye-movement study*. Educational Studies in Mathematics, 96:2, 249-266.

- [32] Healy, L. & Hoyles, C. (2001). *Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls*. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6:3, 235-256.
- [33] Abramovich, S., Sugden, S. J. (2008). *Diophantine Equations as a Context for Technology-Enhanced Training in Conjecturing and Proving*. Primus, 18:3, 257-275.
- [34] Balentyne, B., Varga, M. A. (2017). *Attitudes and Achievement in a Self-Paced Blended Mathematics Course*. Journal of Online Learning Research, 3:1, 55-72.
- [35] Kuva: SAMR-malli. Viitattu 29.3.2019.
<https://www.schoolology.com/blog/samr-model-practical-guide-edtech-integration>, The Schoology Exchange Blog.